Mathematischer Vorkurs

11.3.2019

Vorlesung 1

Organisatorisches

- Warum Mathe-Vorkurs?

Die Mathematik liefert die bei weitem präziseste und effizienteste Sprache zur Beschreibung und Vorhersage phys. Phänomene!

→ Frühe Aneignung der relevanten mathematischen Techniken ist ganz wesentlicher Teil des Physikstudiums

Mathematik im Physikstudium:

(i) Mathematik für Physiker I – IV
(→ FB Mathematik)
(1.–4. Semester, $\underbrace{\text{2.–5. Semester}}_{\text{Hier relevant}}$)

→ Formal sauberer Aufbau der für die Physik besonders wichtigen Mathematik-Bereiche

(ii) <u>Einführung in die Theoretische Physik I und II</u>

(→ FB <u>Physik</u>) (1.–2. Semester)

→ Frühes Einüben und Anwenden wichtiger Rechentechniken, insbes. für die Klassische Mechanik und Elektrodynamik

(iii) <u>Mathematischer Vorkurs</u>

(→ FB <u>Physik</u>) (11.3.2019 – 29.3.2019)
(= Drei Wochen)

→ <u>Konsolidierung, Auffrischung und Homogenisierung</u> des für die Physik besonders wichtigen Schulwissens sowie erste Erweiterungen.

Vorlesung : Täglich 9:00 – 10:30 Uhr

Dozent: Marco Zagermann
Email : Marco.Zagermann@desy.de

Übungen : Täglich 10:45 – 12:15 Uhr
und
13:45 – 15:15 Uhr

Wichtig!

→ Vier Gruppen

Mewes (SR 2)
Leppla-Weber (SR 3)
Otterpohl (SR 4)
Frahm (SR 5)

Darüber hinaus:

Zwei Zusatztutorien:

(Jeweils Dienstag, Mittwoch, Donnerstag)
15:30 Uhr – 17:00 Uhr

(i) Grundkurs:

Sandner-Rodriguez (SR 2)

oder

(ii) Fortgeschrittene:

Baktash (SR 1)

→ Eins von beiden wärmstens empfohlen.

Inhalt und Vorlesungsplan

1. Funktionen
2. Diffentiation
3. Integration
4. Komplexe Zahlen
5. Vektorrechnung

1 Funktionen

1.1 Grundlegende Begriffe

(Reelle) Funktionen

Seien $\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$ Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{D}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$$

"ist Teilmenge von"
(kann auch ganz $\mathbb{R}$ sein)

Eine (reelle) Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in \mathbb{D}$ genau ein Element $y = f(x) \in \mathbb{W}$ zuordnet:

$$f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$$
$$f: x \mapsto f(x) = y$$

$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{D} = \text{"Definitionsbereich" (alias "Urbildmenge", "Urbild")} \\ \mathbb{W} = \text{"Wertebereich" (alias "Wertevorrat", "Zielmenge")} \end{array}}$

"Argument"

"Urbild" $\quad x \in \mathbb{D} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{W}$

"Funktionswert"

"Bild"

"Verarbeitungsvorschrift"

Zur Bedeutung von "jedem" und "genau ein":

Wird einem Urbild $x \in \mathbb{D}$

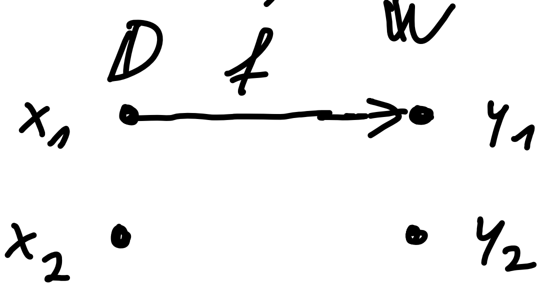
(i) kein Bild

oder

(ii) mehr als ein Bild

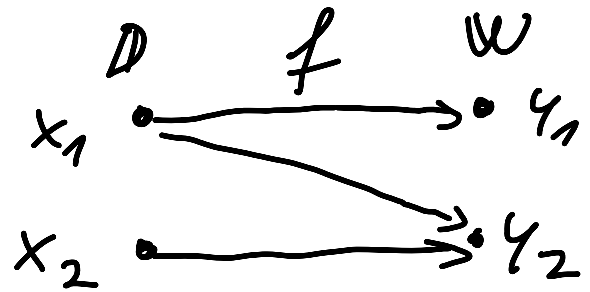
zugeordnet, so ist dies <u>keine</u> Funktion, z.B.

(i)



→ <u>keine</u> Funktion, denn x_2 hat <u>kein Bild</u>!

(ii)



→ <u>keine</u> Funktion, denn x_1 hat <u>zwei Bilder</u>

Beispiele für Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ „ohne"

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

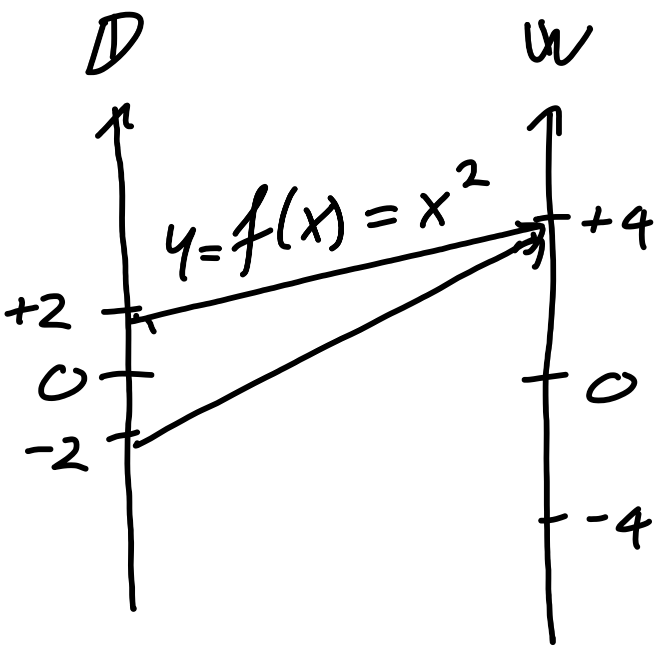
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

→ keine Funktion, da $0 \in \mathbb{D}$ kein Bild hat)

(ii) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$$y = f(x) = x^2 \geq 0$$



An diesem zweiten Beispiel sieht man:

(i) Der <u>Wertebereich</u> $\mathbb{W}$ muss <u>nicht</u> notwendigerweise komplett ausgeschöpft werden, d.h. es kann Elemente $y \in \mathbb{W}$ geben, die nicht als Funktionswerte $f(x)$ eines Elementes $x \in \mathbb{D}$ auftreten (Hier z.B. $y = -4$)

($\exists$ $y \in \mathbb{W}$ ohne Urbild)

"Es gibt"

(ii) Es <u>kann</u> Elemente $y \in \mathbb{W}$ geben, die Funktionswerte mehrerer Argumente $x \in \mathbb{D}$ sind, z.B. hier

$$y = 4 = \begin{cases} 2^2 & = f(2) \\ (-2)^2 & = f(-2) \end{cases} \quad \left(\Rightarrow \exists\ y \in \mathbb{W} \text{ mit mehr als einem Urbild} \right)$$

Definition:

Die Menge der tatsächlich auftretenden Funktionswerte,

$$\boxed{f(\mathbb{D}) := \{ f(x) \in \mathbb{W} \mid x \in \mathbb{D} \}}$$

"ist definiert durch"

"Für die gilt"

heißt "**Bildbereich**" (oder "Bild von $\mathbb{D}$ unter f")

($\rightarrow$ Der Bildbereich ist eine Teilmenge des Wertebereichs)

$\Rightarrow$ Jedes Element $y \in f(\mathbb{D})$ hat <u>mindestens</u> ein Urbild in $\mathbb{D}$

Im Beispiel $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{+,0} := \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$

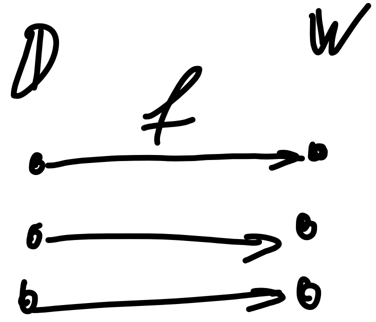
Terminologie:

(i) Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt **injektiv**, wenn gilt:

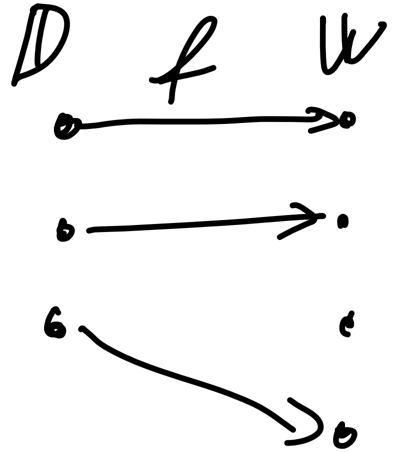
$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2}$$

$\iff$ Jedes Element y im Wertebereich $\mathbb{W}$ wird höchstens einmal angenommen.

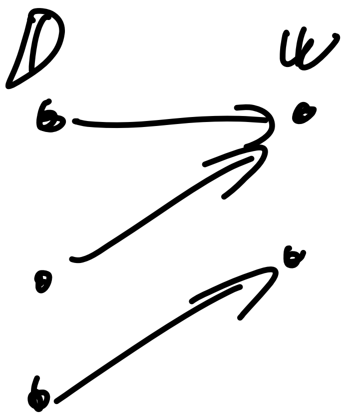
Illustration:



$\Rightarrow$ injektiv



$\Rightarrow$ injektiv



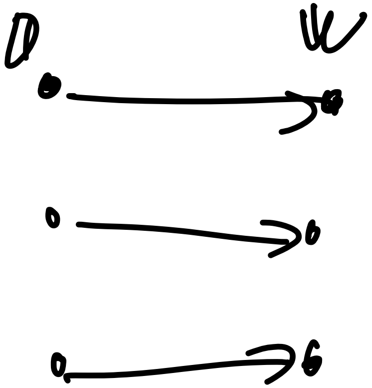
$\Rightarrow$ nicht injektiv.

(ii) Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt <u>surjektiv</u>, wenn gilt

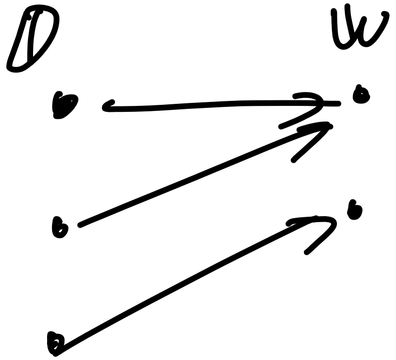
$$\boxed{f(\mathbb{D}) = \mathbb{W}} \quad (\text{Bildbereich} = \text{Wertebereich})$$

$\Longleftrightarrow$ Jedes Element y im Wertebereich $\mathbb{W}$ wird <u>mindestens einmal angenommen</u>

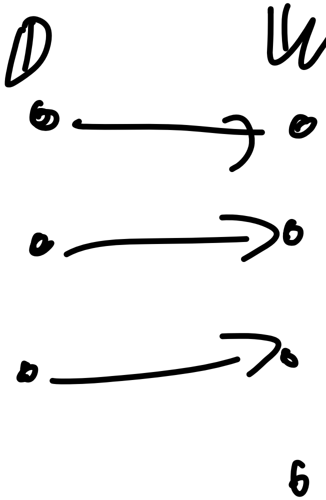
<u>Illustration</u>



$\rightarrow$ Surjektiv



$\rightarrow$ surjektiv

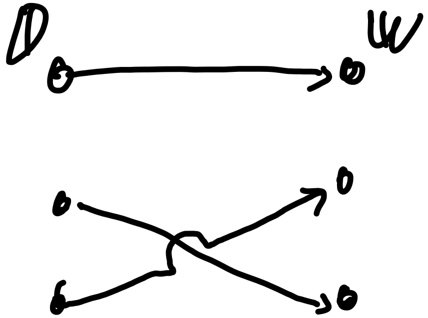


$f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{W}$ $\rightarrow$ nicht surjektiv.

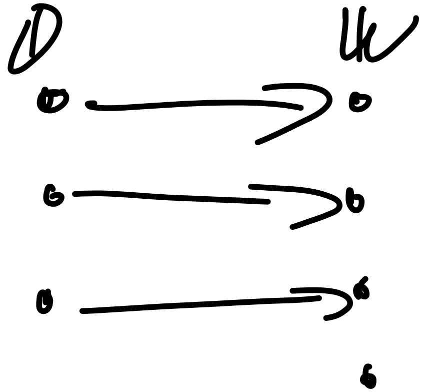
<u>Bem:</u> Durch Verkleinerung von $\mathbb{W}$ auf $f(\mathbb{D})$ kann eine nicht surjektive Funktion surjektiv "gemacht" werden.

(iii) Eine Funktion $f: D \to W$ heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Illustration:

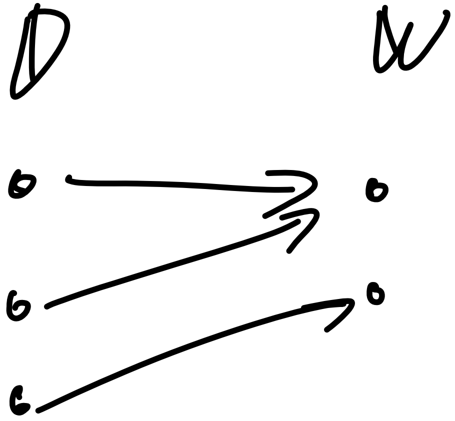


$\Rightarrow$ bijektiv



$\Rightarrow$ injektiv, aber nicht surjektiv

$\Rightarrow$ nicht bijektiv



→ surjektiv, aber nicht injektiv

→ nicht bijektiv

⇒ <u>Bijektive</u> Funktionen lassen sich <u>umkehren</u>!

→ Details später.