Vorlesung 2

12. 3. 2019

$\boxed{\text{https://unith.desy.de/teaching/lectures/vorkurs2019}}$

Letztes Mal: Reelle Funktionen

$\mathbb{D} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W} \\ f: x \longmapsto f(x) = y \in \mathbb{W} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Jedem } x \in \mathbb{D} \text{ wird} \\ \text{genau ein } y = f(x) \in \mathbb{W} \\ \text{zugeordnet} \end{array}$$

Dies sind keine Funktionen:

(sonden Beispiele für "Relationen")

Der Graph einer Funktion:

$\mathbb{D} \times \mathbb{W} \ni (x, y)$

Kartesisches Produkt

Die Menge $\Gamma_f := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{D},\ y = f(x)\} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{W} \subset \mathbb{R}^2$

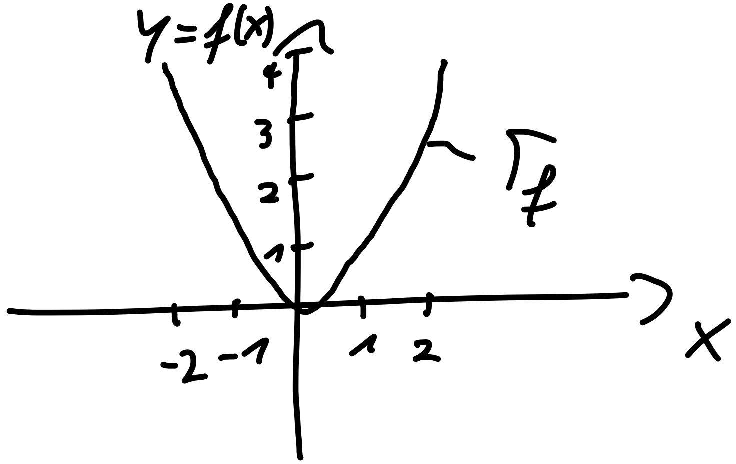
heißt der "Graph der Funktion f"

Beispiel:

$\mathbb{D} = [-2, 2] \leftarrow$ Alle reellen Zahlen x mit $-2 \leq x \leq 2$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



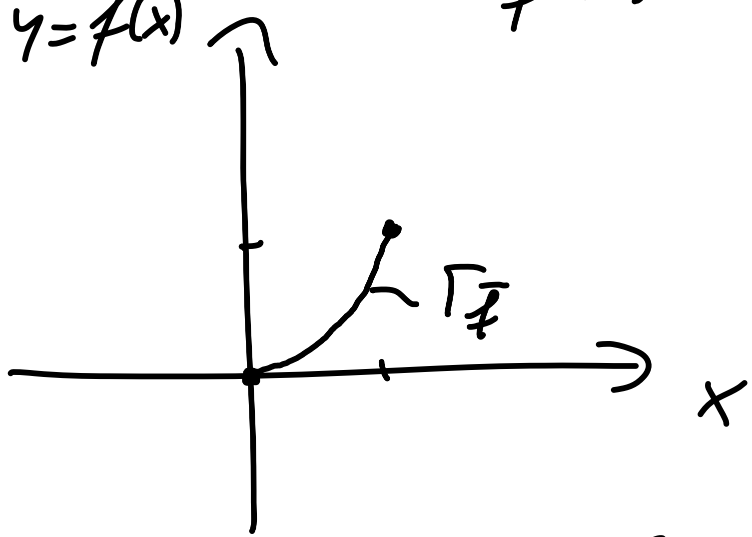
Beispiel 2:

$$\tilde{f} : \tilde{\mathbb{D}} \to \tilde{\mathbb{W}}$$

$$\tilde{\mathbb{D}} = [0,1] \quad , \quad \tilde{\mathbb{W}} = \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$

$$\tilde{f}(x) = x^2$$

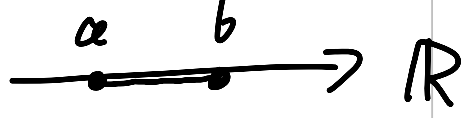


Achtung: f und $\tilde{f}$ haben dieselbe Funktionsvorschrift, sind aber aufgrund des unterschiedlichen Definitionsbereiches ($\mathbb{D}$ vs. $\tilde{\mathbb{D}}$) nicht dieselben Funktionen. (z.B. ist f weder surjektiv noch injektiv, $\tilde{f}$ ist injektiv)

Notation für reelle Intervalle:

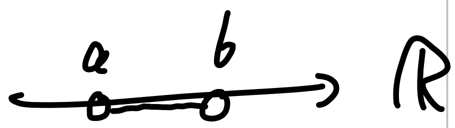
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



$=$ <u>geschlossenes Intervall</u> (von a bis b)
(enthält beide Randpunkte a, b)

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



$=$ <u>offenes Intervall</u>
(enthält a, b <u>nicht</u>)

- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

  } <u>halboffene</u> <u>Intervalle</u>

1.2 Eigenschaften von Funktionen

Nullstellen

Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{D}$ ein Punkt mit

$$\boxed{f(x_0) = 0}$$

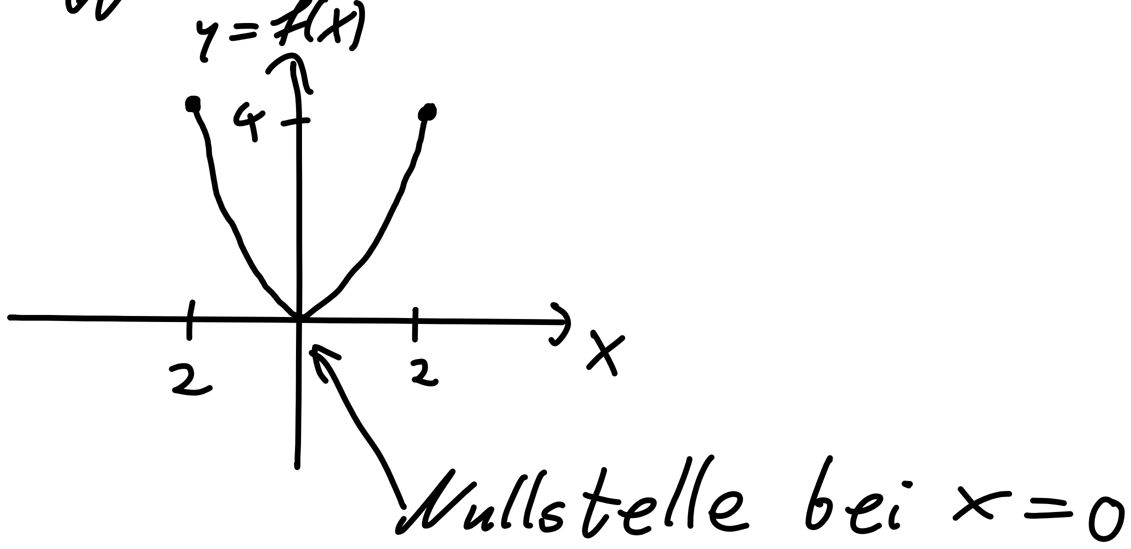
Dann heißt x_0 eine <u>Nullstelle</u> von f und

$$\boxed{N_f := \{x \in \mathbb{D} \mid f(x) = 0\}}$$

die <u>Menge der Nullstellen</u> von f.

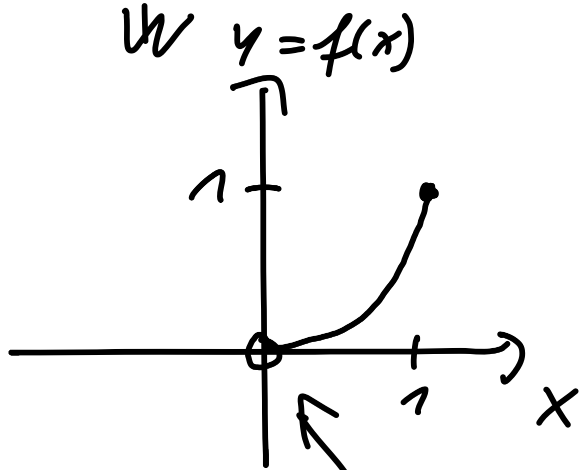
Beispiele.

(i) $f : \underbrace{[-2,2]}_{D} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{W}$, $f(x) = x^2$



$\Rightarrow N_f = \{0\}$

(ii) $f: \underbrace{(0,1]}_{\mathbb{D}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\mathbb{W}}$, $f(x) = x^2$



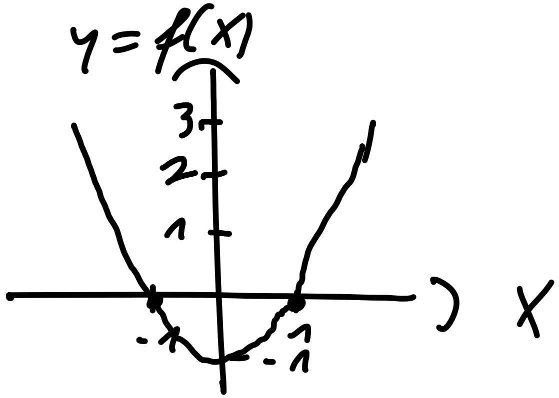
$x=0$ ist nicht in $\mathbb{D}$

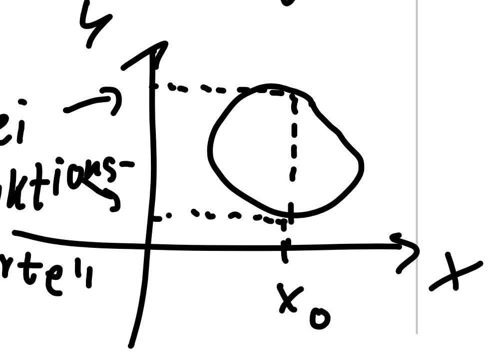
$\Rightarrow$ Keine Nullstelle

$\Leftrightarrow N_f = \emptyset$

(iii) $f: \underbrace{\mathbb{R}}_{\mathbb{D}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\mathbb{W}}$, $f(x) = x^2 - 1$

Kein Graph einer Funktion





Zwei "Funktions-werte"

$\Rightarrow$ Zwei Nullstellen

$\Rightarrow N_f = \{-1, 1\}$

Nullstellen Findet man durch Auflösen von $f(x)=0$ nach x.

Symmetrie von Funktionen

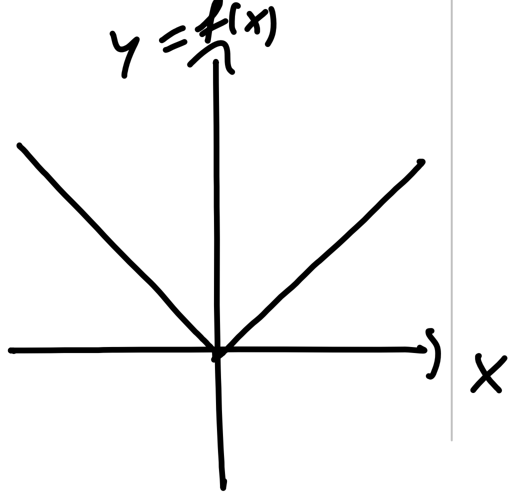
- Eine Funktion f heißt <u>gerade</u>, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

$\rightarrow$ Der Graph Γ_f ist dann <u>spiegelsymmetrisch zur y-Achse</u>:

<u>Beispiel</u>:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{array}\right\} f(x) = |x| = |-x| = f(-x)$$



- Eine Funktion f heißt <u>ungerade</u>, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

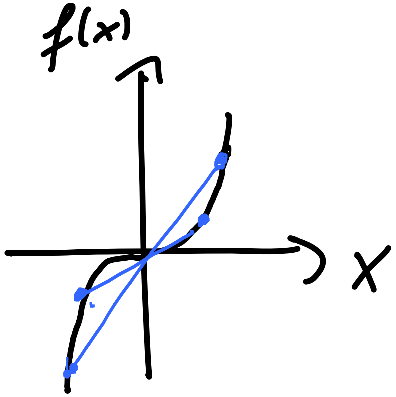
$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

→ Der Graph Γ_f ist dann <u>punktsymmetrisch</u> <u>zum Ursprung</u> $(x,y) = (0,0)$.

<u>Beispiel</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

$(-x)^3 = (-x)\cdot(-x)(-x)$
$= -x^3$

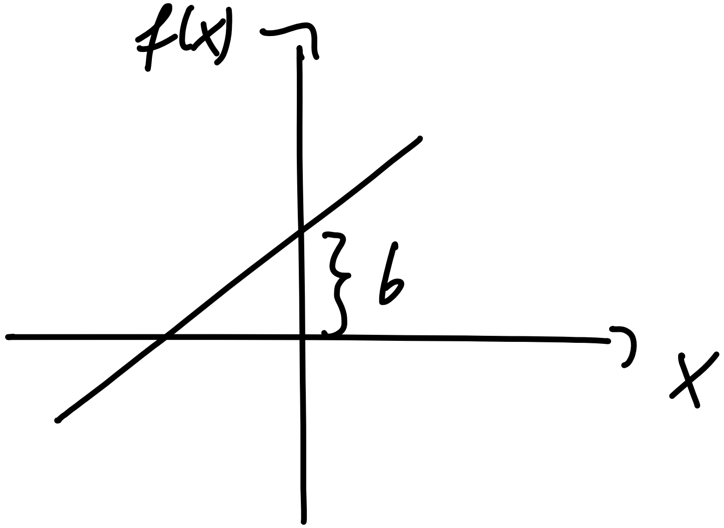
$$f(x) = x^3 = -\underbrace{(-x)^3}_{-x^3} = -f(-x)$$



Bemerkung:

Die meisten Funktionen sind <u>weder gerade noch ungerade</u>,

z.B. $f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0 \neq b$

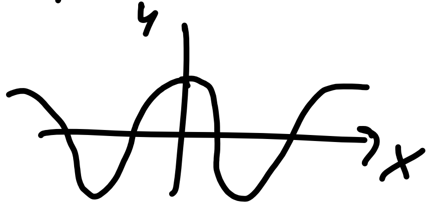


Weitere Beispiele

$(\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R})$

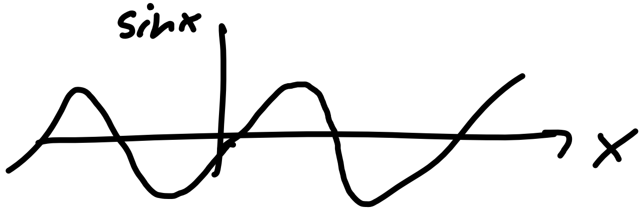
Gerade

- $f(x) = x^2 \quad \left(f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x) \right)$
- $f(x) = \cos x \quad \left(f(x) = \cos x = \cos(-x) = f(-x) \right)$



Ungerade:

- $f(x) = x \quad \left(f(x) = x = -(-x) = -f(-x) \right)$
- $f(x) = \sin x \quad \left(f(x) = \sin x = -\sin(-x) = -f(-x) \right)$



Monotonie von Funktionen

Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine reelle Funktion.

f heißt...

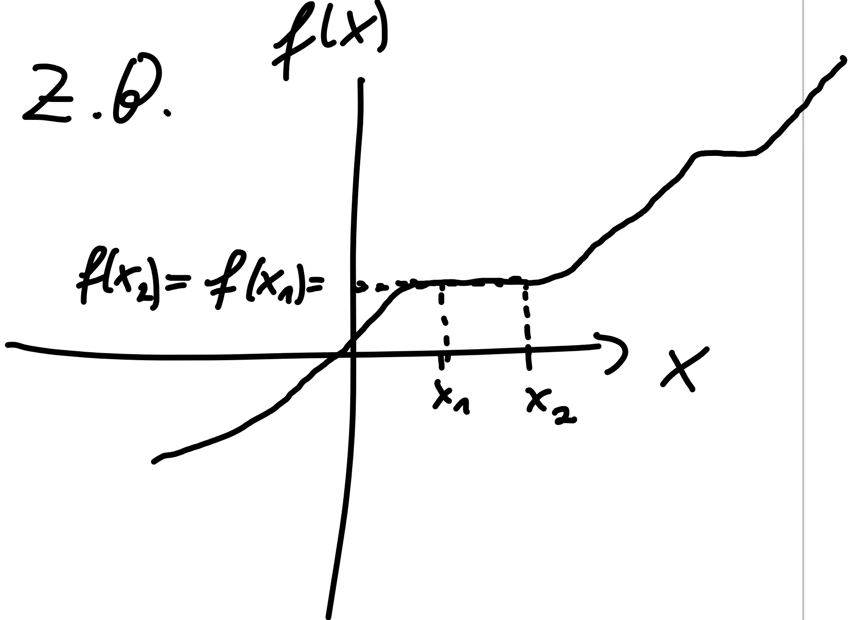
(i) ... **monoton steigend**, falls $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ mit

"Für alle"

$x_1 < x_2$ gilt:

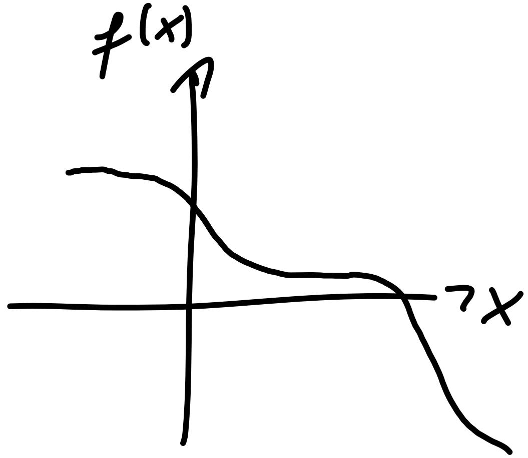
$$\boxed{f(x_1) \leq f(x_2)}$$

z.B.



(ii) … <u>monoton fallend</u> falls $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

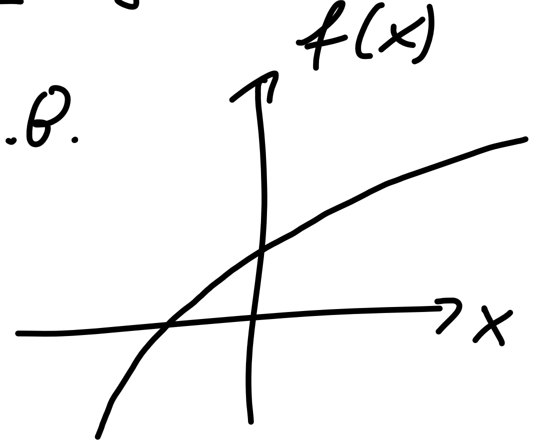
$$\boxed{f(x_1) \geq f(x_2)}$$

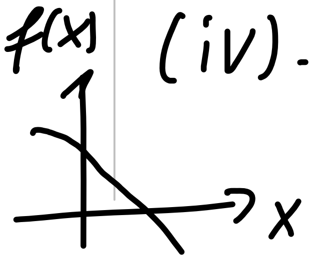


(iii) … <u>streng monoton steigend</u>, falls $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$\boxed{f(x_1) < f(x_2}$$

z.B.

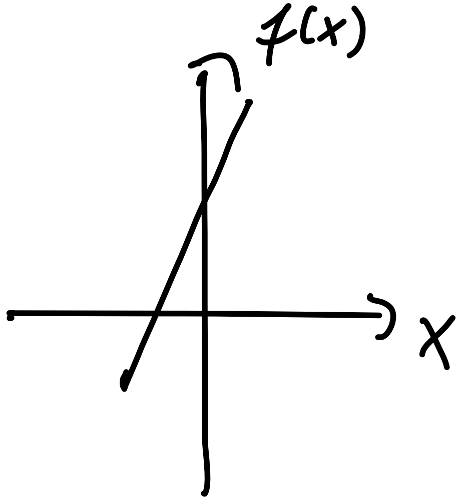




(iv) … <u>streng monoton fallend</u>, falls $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$

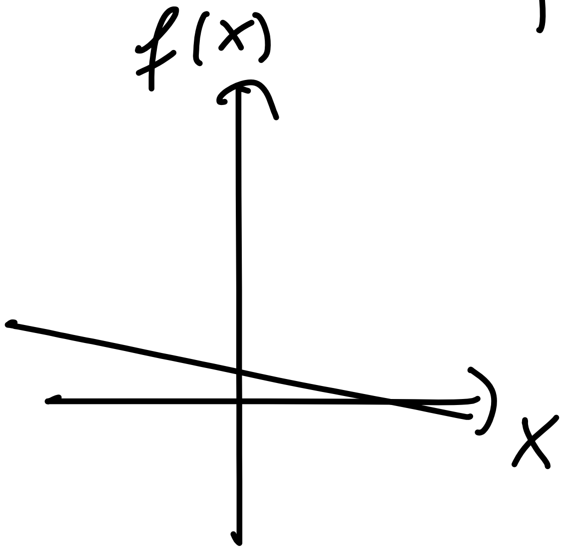
Beispiele:

- $f(x) = 2x + 3$



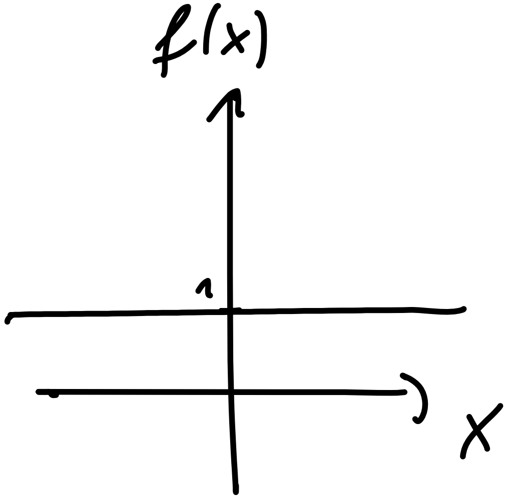
(streng) monoton steigend

- $f(x) = -x + 2$



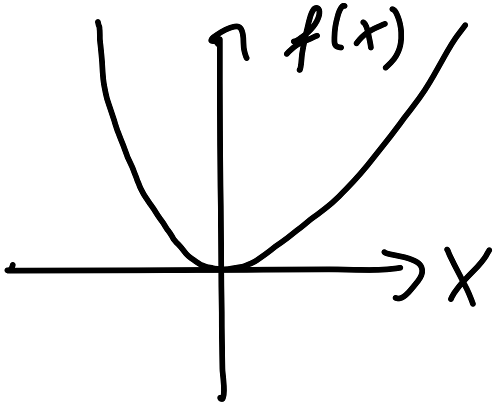
(streng) monoton fallend.

- $f(x) = 1$



Sowohl monoton steigend als auch monoton fallend nicht jedoch streng monoton steigend oder streng monoton fallend.

- $f(x) = x^2$



weder (streng) monoton steigend noch (streng) monoton fallend.

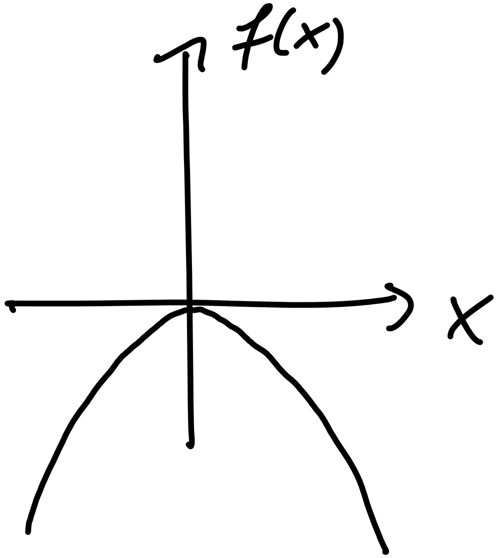
<u>Aber:</u>
- streng monoton steigend für $x > 0$
- streng monoton fallend für $x < 0$.

Beschränktheit

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein $B \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\boxed{B \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D}}$$

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$

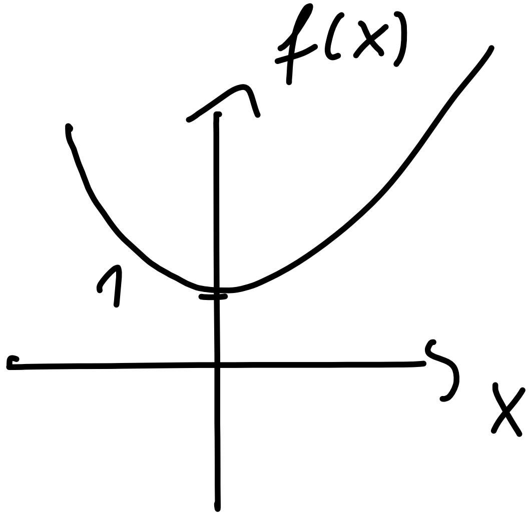


ist nach oben beschränkt mit $B = 0$ (oder $B > 0$)

Analog: $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt nach unten beschränkt, falls es ein $B \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\boxed{B \leq f(x) \ \forall \ x \in \mathbb{D}}$$

Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$



Wähle $B \leq 1$

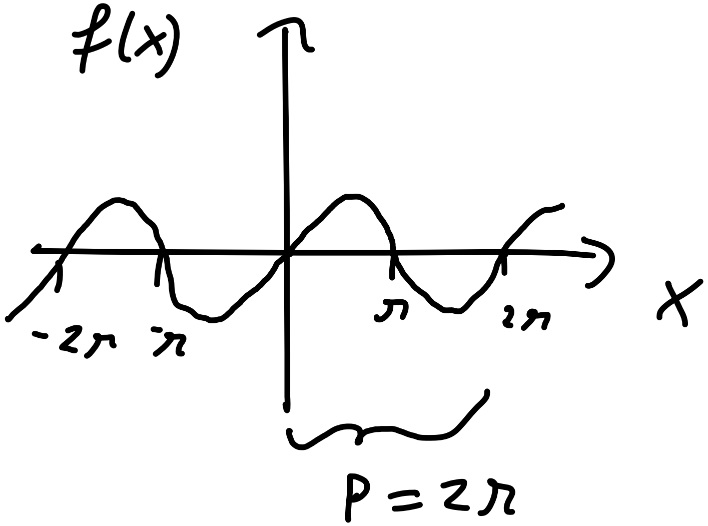
Periodizität

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch (mit Periode P), falls für alle $x \in D$ gilt:

$$\boxed{f(x+P) = f(x)}$$

Beispiele:

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad P = 2\pi$



(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin(\omega x) \implies P = \frac{2\pi}{\omega}$$

<u>denn</u>: $f(x+p) = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$

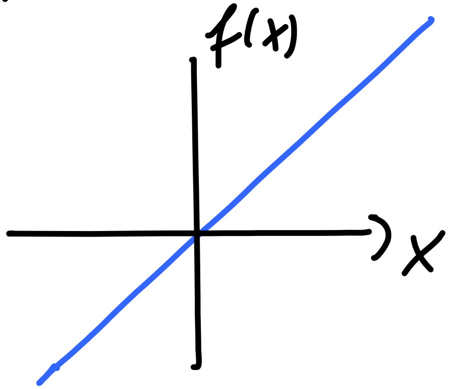
$$= \sin\left(\omega x + 2\pi\right) = \sin(\omega x) = f(x)$$

Weil sin die Periode $p = 2\pi$ hat

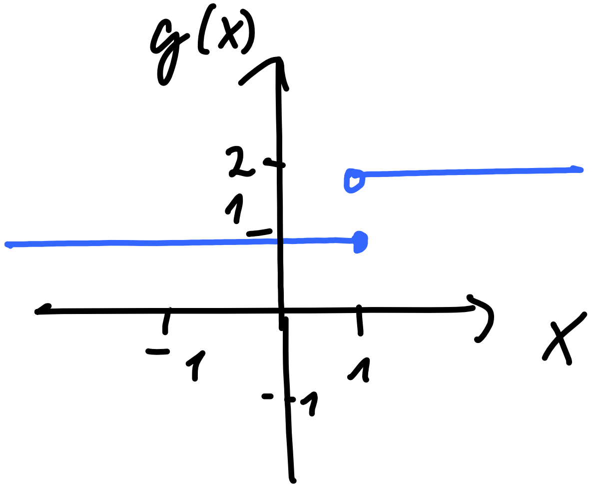
Stetigkeit

Betrachte die beiden Funktionen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{Für alle } x \leq 1 \\ 2 & \text{Für alle } x > 1 \end{cases}$



Wichtiger Unterschied:

f hat keine "Sprünge" (Diskontinuitäten), aber g hat einen "Sprung" (Diskontinuität) bei $x=1$.

f ist ein Beispiel für eine "stetige" Funktion, g ist dagen nicht "stetig"

Genaue Definition von "stetig": nächstes Mal.