Vorlesung 3

13.3.2019

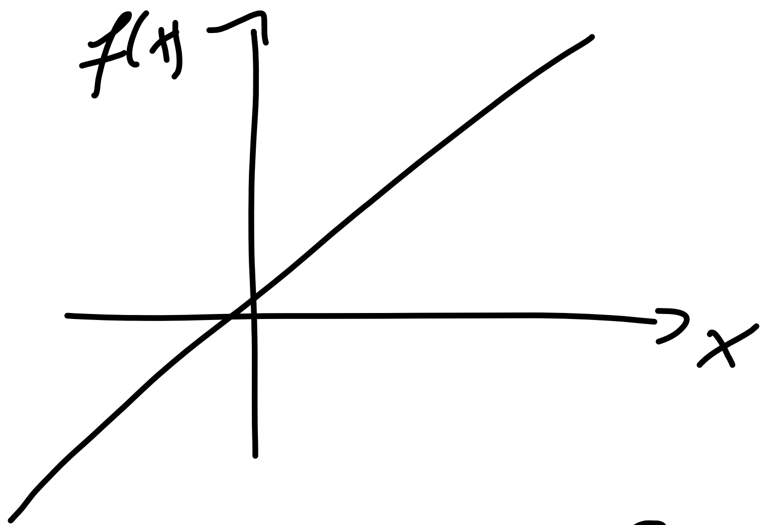
Literatur:

- Michael Ruhrländer
  "Brückenkurs Mathematik"
- Klaus Hefft
  "Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik"

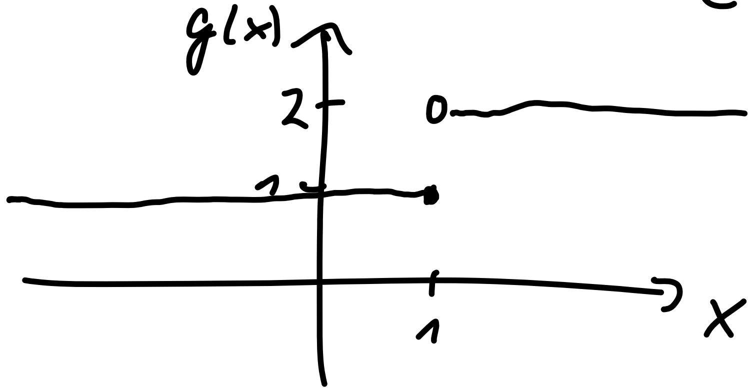
Stetigkeit von Funktionen

Betrachte:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (Identitätsabbildung)



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \leq 1 \\ 2 & \text{für alle } x > 1 \end{cases}$



Wichtiger Unterschied:

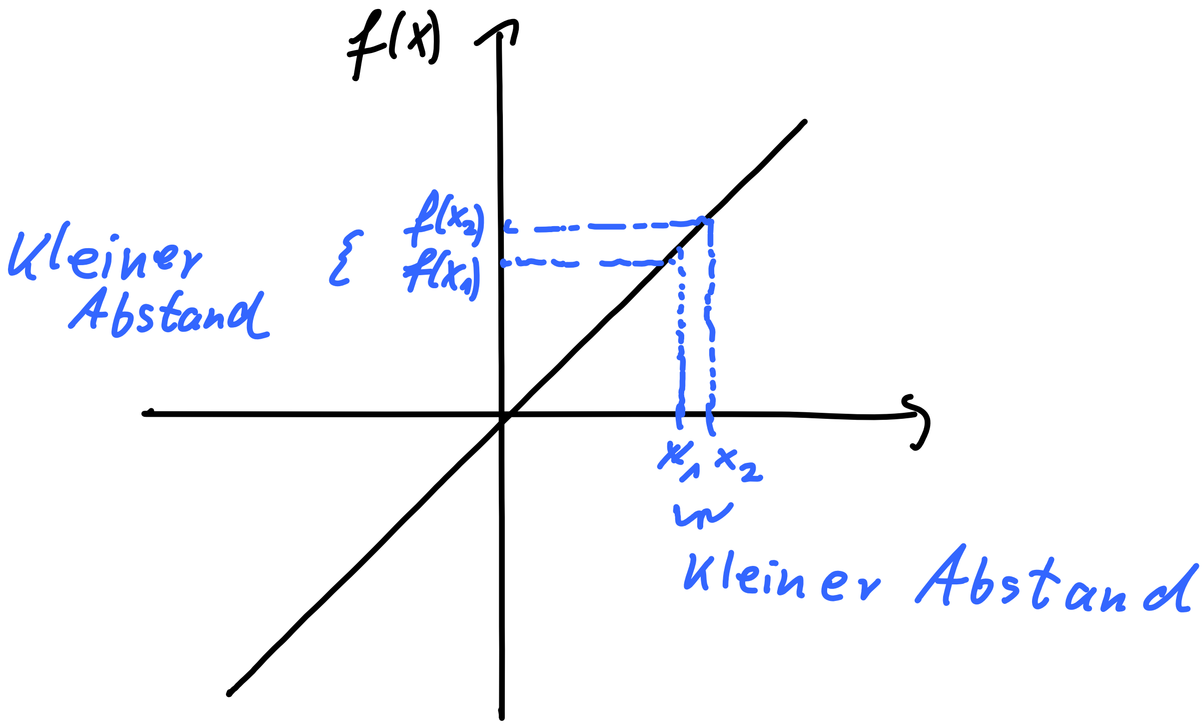
$\boxed{\begin{array}{l}f \text{ hat keine "Sprünge"} \\ g \text{ hat einen "Sprung" bei } x=1\end{array}}$

Man sagt: f ist überall "stetig"
g ist bei $x=1$ nicht "stetig"

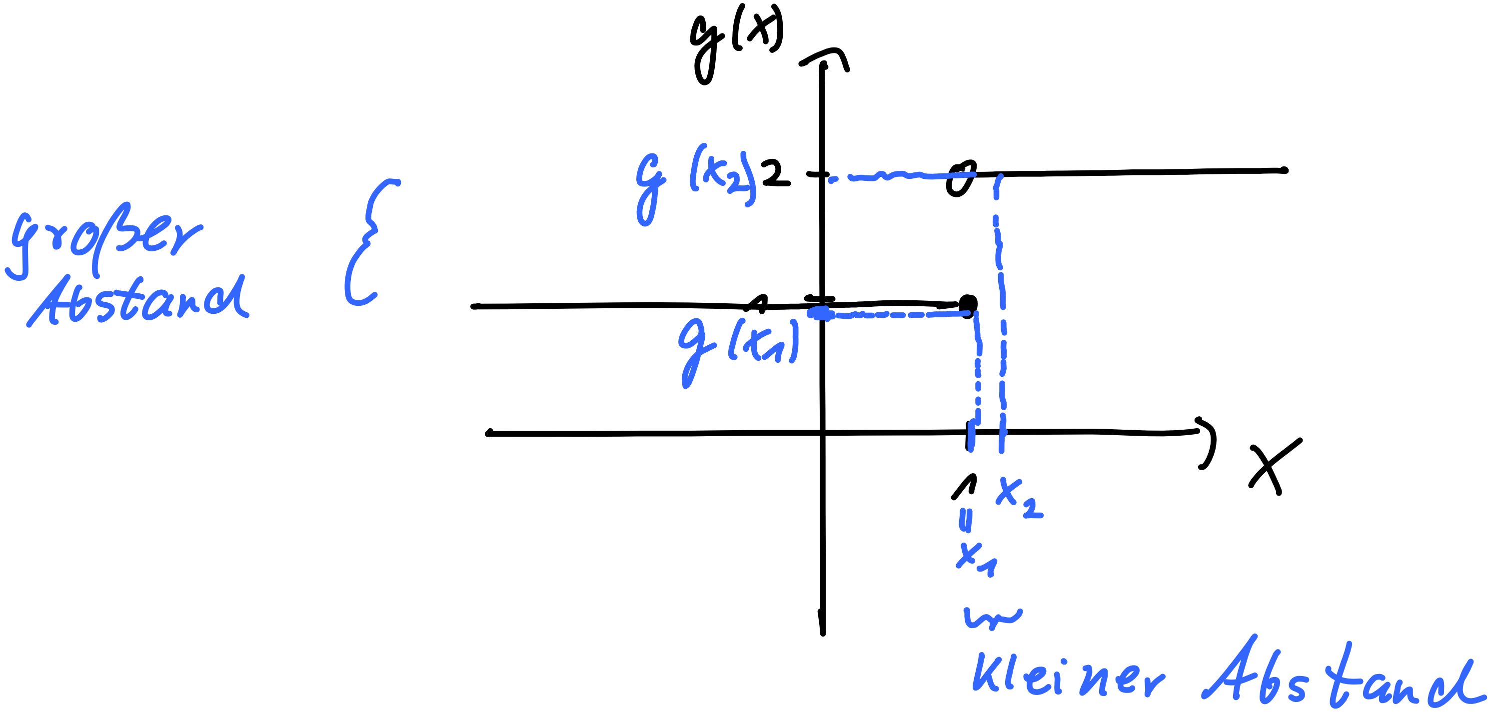
Zwei mathematisch besser handhabbare Formulierungen des obigen Sachverhalts:

Formulierung 1:

Liegen $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ nah beieinander, so liegen auch $f(x_1), f(x_2) \in \mathbb{W}$ nah beieinander:



Bei g ist dies für $x_1 = 1$ und $x_2 > 1$ nicht der Fall:

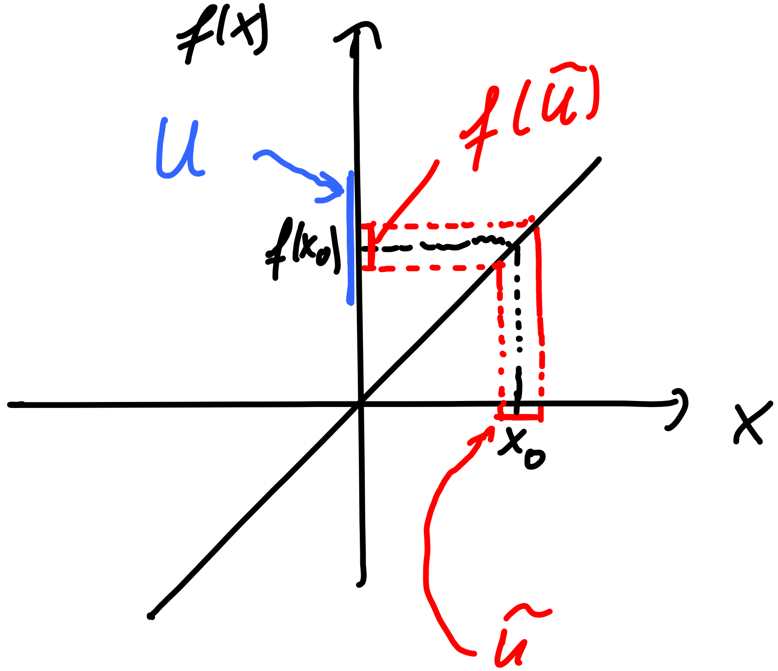


$\Rightarrow$ Eine stetige Funktion bildet benachbarte Argumente aus $\mathbb{D}$ auf benachbarte Funktionswerte in $\mathbb{W}$ ab.

Formulierung 2:

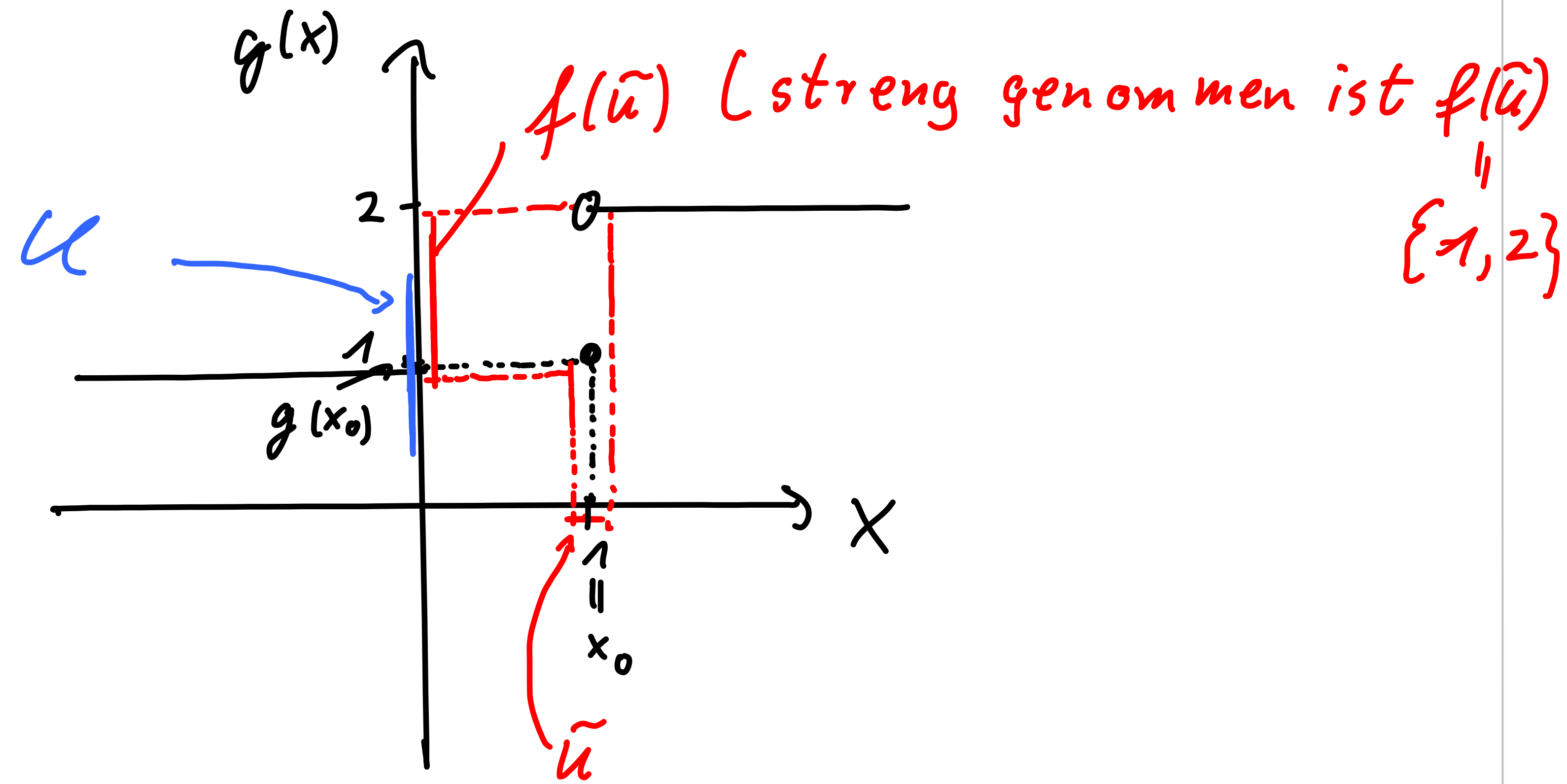
Sei $x_0 \in \mathbb{D}$ mit Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{W}$.

$\Rightarrow$ Zu jeder noch so kleinen Umgebung U von $f(x_0)$ in $\mathbb{W}$ gibt es stets eine hinreichend kleine Umgebung $\hat{U}$ von x_0 in $\mathbb{D}$, sodass alle Funktionswerte von Punkten aus $\hat{U}$ auch vollständig in U liegen: $f(\hat{U}) \subset U$



Für g ist dies bei $x_0 = 1$ nicht der Fall:

$x_0 = 1$ heit $g(x_0) = 1$



Formulierung 2 ist die Grundlage für die in der Mathematik häufig benutzte Definition der Stetigkeit:

<u>Def. 1</u>:

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt <u>in einem Punkt</u> $x_0 \in \mathbb{D}$ <u>stetig</u>, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\boxed{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{D} \text{ mit } |x - x_0| < \delta}$$

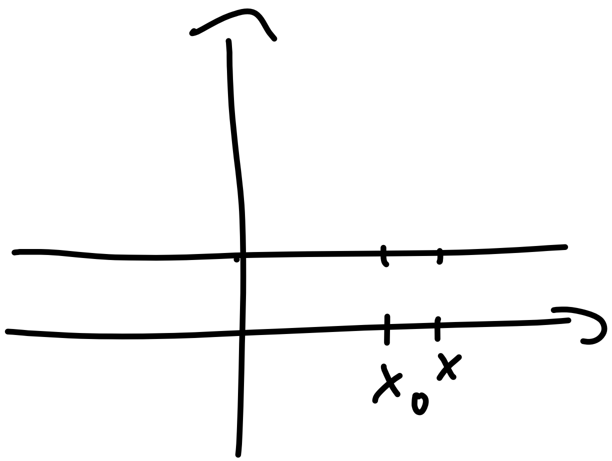
Übersetzung in die Formulierung 2 von oben:

$$U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$$\hat{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$|\underbrace{x_0 - \delta}_{x} - x_0| = |-\delta| = \delta$$

Frage: $f(x) = 1$



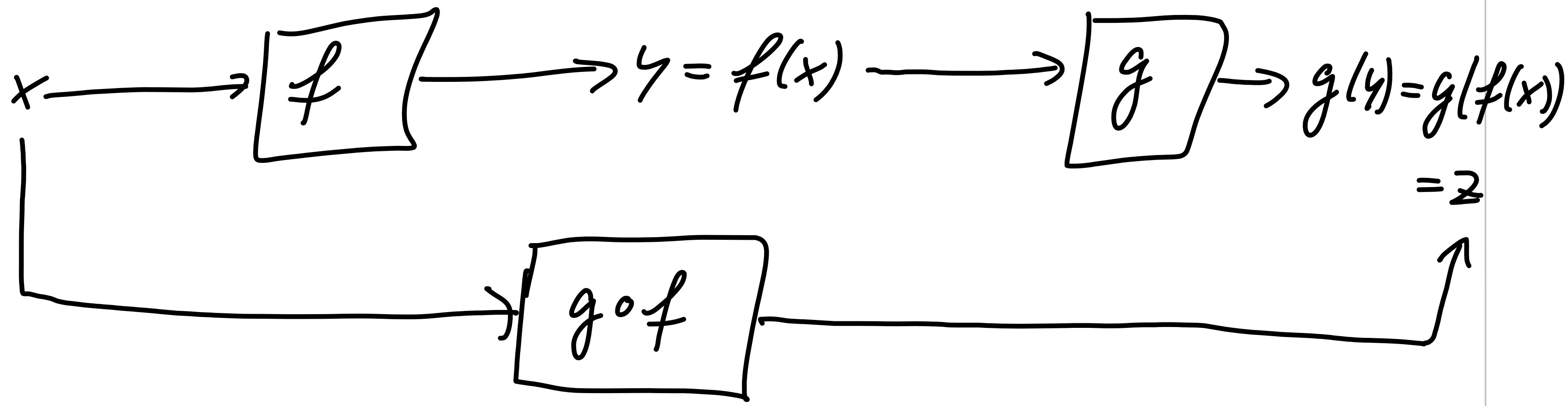
Def 2:

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt stetig wenn sie an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig ist (im Sinne von Def 1).

1.3 Verkettung und Umkehrung von Funktionen

Verkettung (alias "Hintereinanderausführung") von Funktionen

Grundidee:



("g Kringel f" oder "g nach f")

M.a.W. $g \circ f$ ist die Funktion, die denselben Effekt hat wie die Hintereinanderausführung von (erst) f und (dann) g

<u>Etwas genauer:</u>

Seien $f: \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$

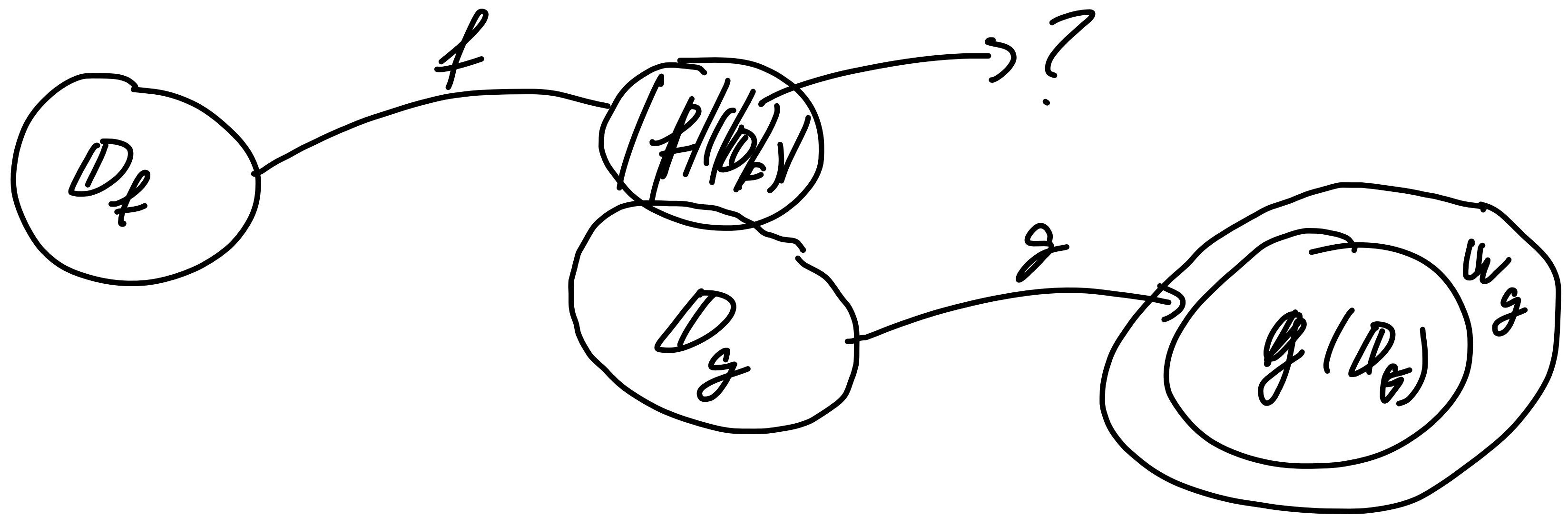
$g: \mathbb{D}_g \to \mathbb{W}_g$

zwei Funktionen mit

$$f(\mathbb{D}_f) \subset \mathbb{D}_g$$

($\to$ g kann nur dann auf alle Bilder von f wirken)

Gegenbeispiel:



Dann ist die Verkettung $g \circ f$ die Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} &g \circ f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_g \\ &g \circ f : x \longmapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{aligned}}$$

Beispiele:

(i) $f(x) = x + 10 \qquad (\mathbb{D}_f = \mathbb{R},\ f(\mathbb{D}_f) = \mathbb{R} = \mathbb{W})$

$g(x) = x^2 \qquad (\mathbb{D}_g = \mathbb{R},\ g(\mathbb{D}_g) = \mathbb{R}_{+,0} \subset \mathbb{R} = \mathbb{W})$

(bzw. $g(y) = y^2$)

$\Rightarrow f(\mathbb{D}_f) \subset \mathbb{D}_g$

$(\mathbb{R} \subset \mathbb{R})$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{x+10}_{y}) = (x+10)^2$$

$$\Rightarrow g \circ f : x \mapsto (x+10)^2$$

Bemerkung:

Für $f \circ g$ ergibt sich stattdessen:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 10$$

$$\neq (x+10)^2 = g \circ f(x)$$

$\Rightarrow$ Verkettungen sind i.d.R. **nicht vertauschbar**.

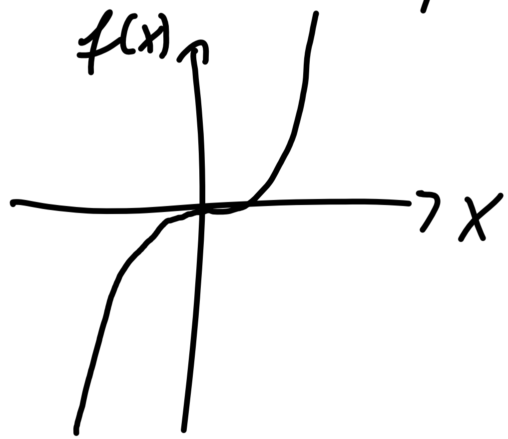
(ii) $f(x) = x^3 \quad (\mathbb{D}_f = \mathbb{R},\ \mathbb{W}_f = f(\mathbb{D}_f) = \mathbb{R})$

$g(x) = \frac{1}{x-8} \quad (\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{8\},\ \mathbb{W}_g = \mathbb{R})$

"ohne"

Problem:

Für $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist $f(\mathbb{D}_f) = \mathbb{R}$



Aber: $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{8\}$

Also: $f(\mathbb{D}_f) \not\subset \mathbb{D}_g \Rightarrow g \circ f$ ist nicht auf ganz $\mathbb{D}_f$ wohldefiniert.

<u>Ausweg</u>: Wähle $\tilde{\mathbb{D}}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f(x)=x^3 \Rightarrow f(\tilde{\mathbb{D}}_f) = \mathbb{R} \setminus \{8\} = \mathbb{D}_g$$

$8 = 2^3$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ existiert auf ganz $\tilde{\mathbb{D}}_f$ und ist gegeben durch:

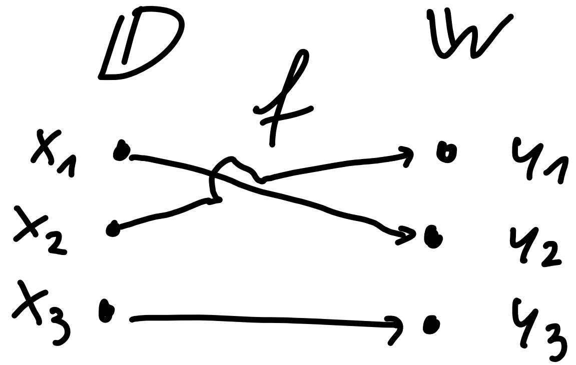
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \frac{1}{x^3 - 8}$$

$$g(y) = \frac{1}{y-8}$$

UmkehrFunktionen

Idee: Für eine bijektive Funktion $f: D \to W$

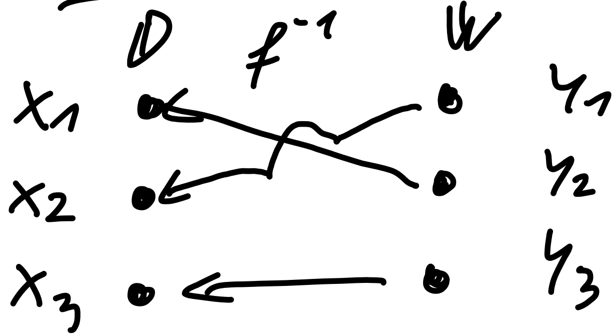
(z.B.



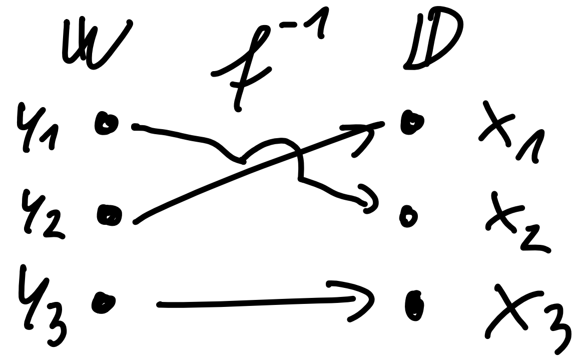
)

Kann man die Zuordnungen auch in umgekehrter Richtung vornehmen und erhält man wieder eine Funktion, die man die UmkehrFunktion $f^{-1}: W \longrightarrow D$ nennt.

Für das obige Beispiel:



bzw.



Die Verkettung $f^{-1} \circ f$ (ebenso für $f \circ f^{-1}$) ergibt die Identitätsfunktion:

$$f^{-1} \circ f\,(x) = x$$

$$\left(f \circ f^{-1}(x) = x \right),$$

denn f^{-1} macht ja die Auswirkungen von f genau rückgängig:

z.B.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D} \arrow[r, phantom, "f"] & \mathbb{W} \arrow[r, phantom, "f^{-1}"] & \mathbb{D} \\
x_1 \arrow[dr] & y_1 \arrow[dr] & x_1 \\
x_2 \arrow[ur] & y_2 \arrow[ur] & x_2 \\
x_3 \arrow[r] & y_3 \arrow[r] & x_3
\end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D} \arrow[r, phantom, "f^{-1} \circ f"] & \mathbb{D} \\
x_1 \arrow[r] & x_1 \\
x_2 \arrow[r] & x_2 \\
x_3 \arrow[r] & x_3
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f^{-1} \circ f(x) = x$

bzw.

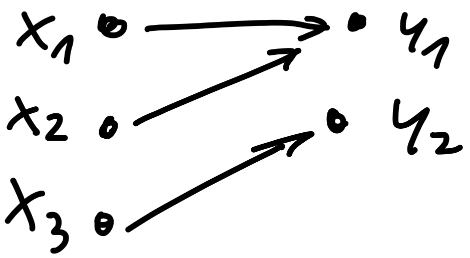
$f^{-1} \circ f(x_1) = x_1$

$f^{-1} \circ f(x_2) = x_2$

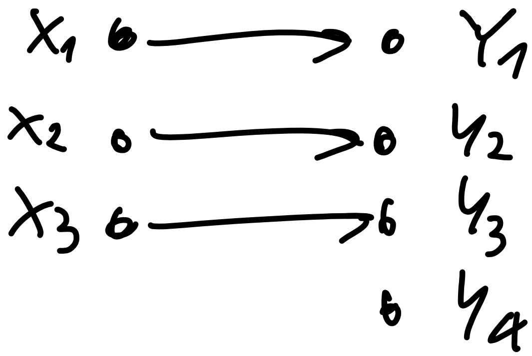
$f^{-1} \circ f(x_3) = x_3$

Warum bijektiv?

Falls f nicht injektiv:



Falls f nicht surjektiv:



Man definiert daher:

Für eine bijektive Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ gibt es eine Funktion $g: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ mit

$$\boxed{g \circ f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{D}}$$

"Für alle"

Diese Funktion g heißt die Umkehrfunktion von f und wird mit f^{-1} bezeichnet. (also $g = f^{-1}$)