Vorlesung 4 — 14. 3. 2019

Letztes Mal:

Umkehrfunktionen:

Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ bijektiv. Dann existiert eine Funktion $f^{-1}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{D}}$$

f^{-1} heißt die Umkehrfunktion von f.

Bemerkungen:

(i) $f^{-1}(x)$ ist nicht der Kehrwert von $f(x)$, also i. A. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

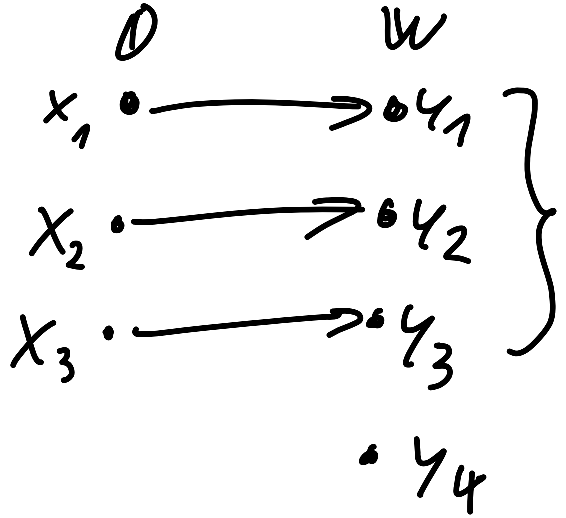
Beispiel: $f(x) = x \implies f^{-1}(x) = x$

$(f^{-1}(y) = y)$

Denn: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x$ ✓

Insbesondere: $f^{-1}(x) = x \neq \frac{1}{x} = \frac{1}{f(x)}$

(ii) Ist $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ injektiv, aber nicht surjektiv, z.B.

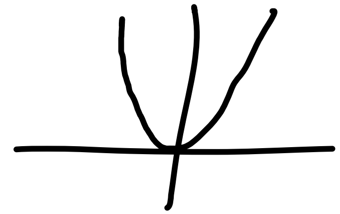


$f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{W}$

So gibt es zwar keine Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$, wohl aber $f^{-1}: f(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$, da $\tilde{f}: \mathbb{D} \to f(\mathbb{D})$ bijektiv ist.

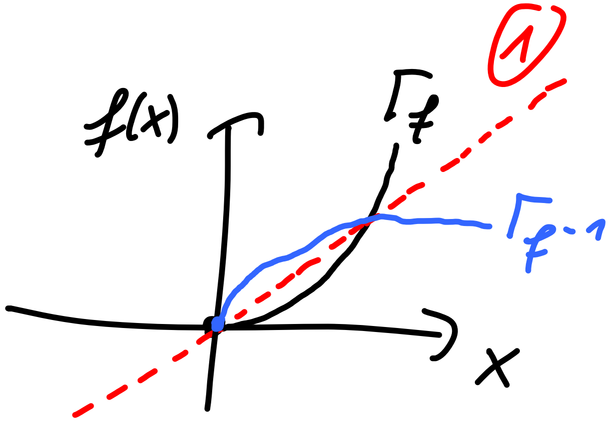
(iii) Der Graph $\Gamma_{f^{-1}}$ von f^{-1} ergibt sich durch Spiegelung von Γ_f an der Winkelhalbierenden durch den 1. Quadranten, z.B.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



$\Longrightarrow$ nicht bijektiv

$\Rightarrow$ Schränke $\mathbb{D}$ auf $[0, \infty) = \mathbb{R}_{+,0}$ ein
und wähle $\mathbb{W} = f(\mathbb{D})$



<u>M.a.W.:</u> $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

$$f(x) = x^2$$

ist bijektiv auf $\mathbb{D} \subset [0, \infty)$ und somit umkehrbar mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Denn: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

(iv) Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ bestimmt man wie folgt:

(1) Funktionsgleichung hinschreiben:

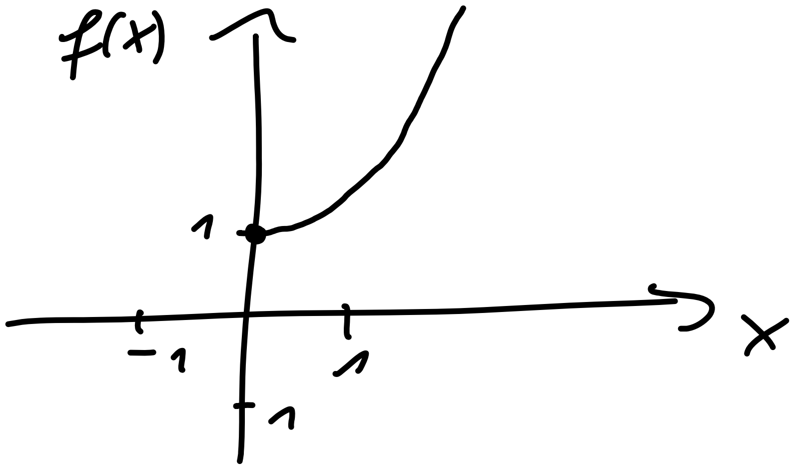
$$y = f(x)$$

(2) Auflösen nach x : $x = f^{-1}(y)$

(3) Überprüfen, ob $f^{-1} \circ f(x) = x$ ist.

Beispiel:

$$f: \underbrace{[0,\infty)}_{\mathbb{D}} \to \underbrace{[1,\infty)}_{\mathbb{W} = f(\mathbb{D})}, \quad f(x) = 1 + x^2$$



ist bijektiv und somit umkehrbar.

(1) $y = 1 + x^2$

(2) $x^2 = y - 1 \iff x = \pm\sqrt{y-1}$

Plus oder Minus

Welches Vorzeichen muss man nehmen?

x muss in $\mathbb{D}$ sein $\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow$ Pluszeichen ist richtig

$$x = f^{-1}(y) = +\sqrt{y-1}$$

(3) Probe:

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\underbrace{1+x^2}_{y}) = \sqrt{\underbrace{(1+x^2)}_{y}-1}$$

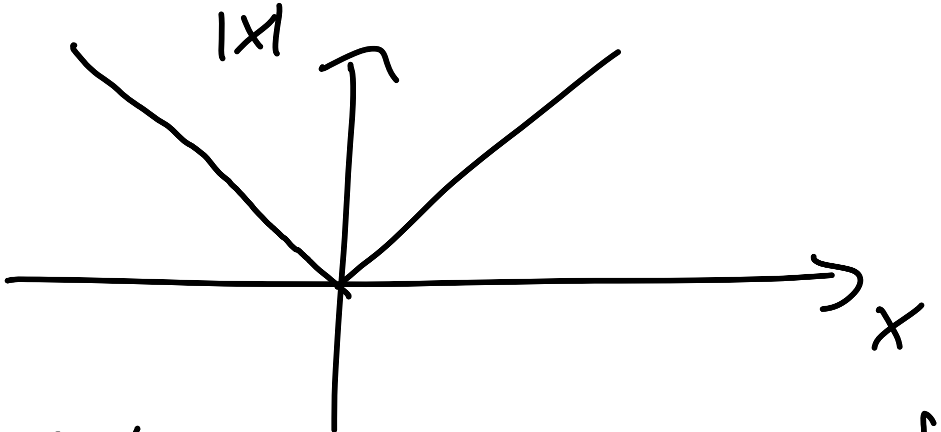
$$= \sqrt{x^2} \underset{x \geq 0}{=} x \quad ✓$$

1.4 Spezielle Funktionen

Funktionen mit "Knicken" oder "Sprüngen"

(i) Betragsfunktion

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



$\Rightarrow f(x) = |x|$ ist:

- stetig
- nach unten beschränkt
- nicht monoton steigend oder fallend
- nicht periodisch
- gerade
- nicht injektiv
- nicht surjektiv

$\Rightarrow$ nicht umkehrbar (es sei denn, D wird verkleinert)

Bemerkung:

Es gilt:

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2} \quad \forall \ x \in \mathbb{R}}$$

Beweis:

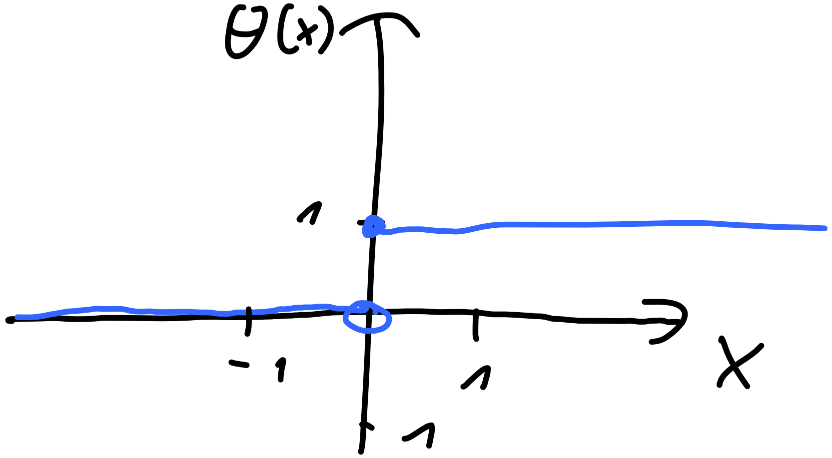
Für jedes $a \geq 0$ gilt: $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a} = a$

$\Rightarrow x \geq 0 = \sqrt{x^2} = x = |x|$

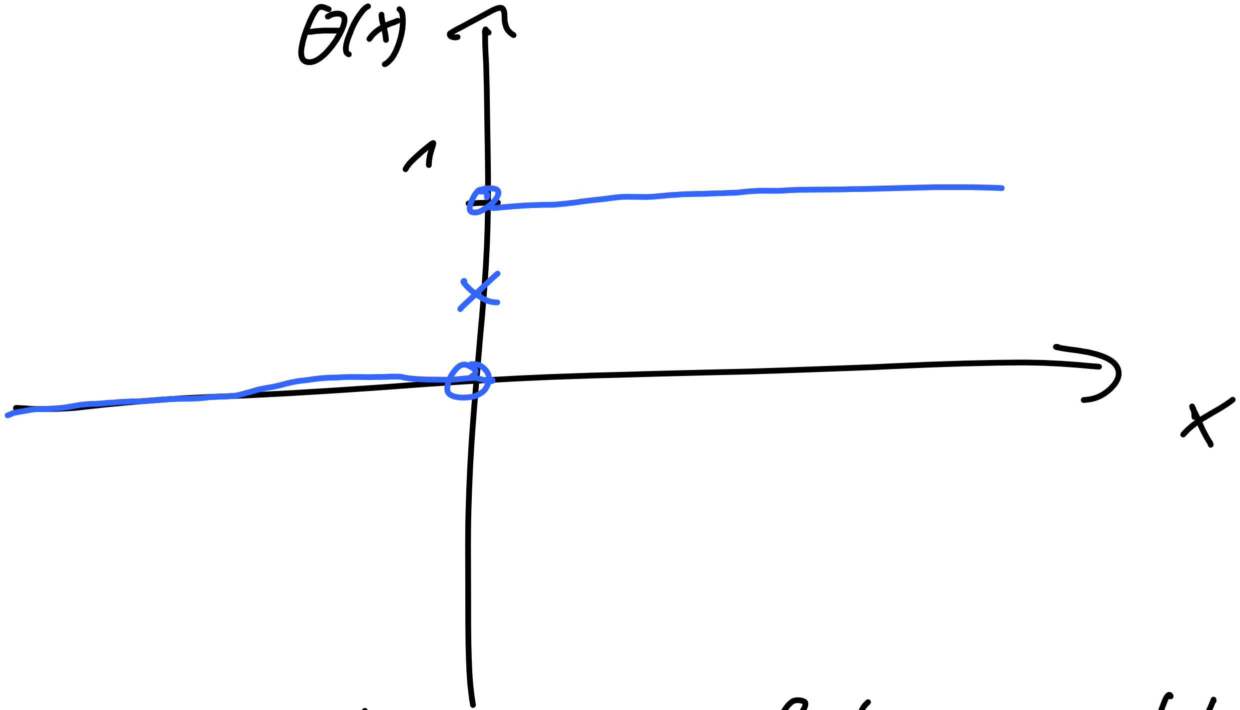
$x < 0 = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\underbrace{(-x)}_{a>0} \cdot \underbrace{(-x)}_{a>0}} = \underbrace{(-x)}_{a>0} = |x|$

(ii) Die Heaviside'sche Sprungfunktion

$$\boxed{\begin{array}{l} \Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \Theta : \mathbb{R} \to \{0,1\}) \\[1em] \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$



Bemerkung: Für den Funktionswert $\Theta(0)$ gibt es auch andere Konventionen, z. B. $\Theta(0) = \frac{1}{2}$



(Der genaue Wert von $\Theta(0)$ spielt in vielen Anwendungen Keine Rolle)

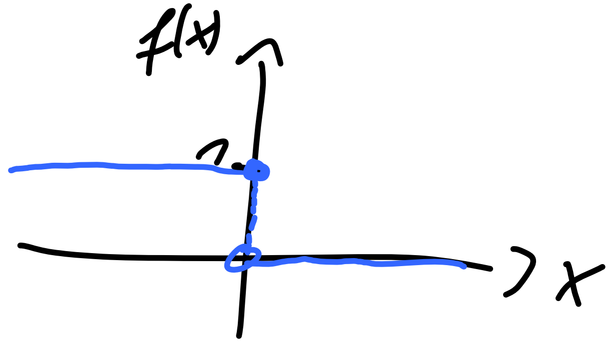
Θ ist:

- Bei $x = 0$ nicht stetig
- monoton steigend (aber nicht streng monoton steigend)
- nach oben und unten beschränkt
- Nicht periodisch
- Weder gerade noch ungerade
- Nicht injektiv und nur für $W = \{0, 1\}$ surjektiv → nicht umkehrbar

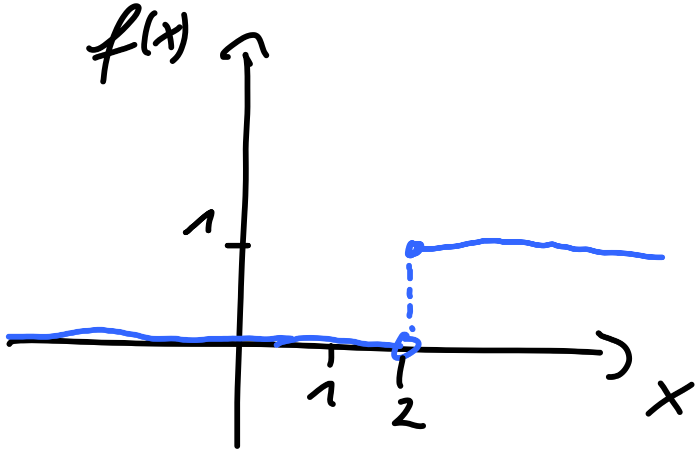
Mit Θ lassen sich viele weitere Funktionen konstruieren:

z.B.

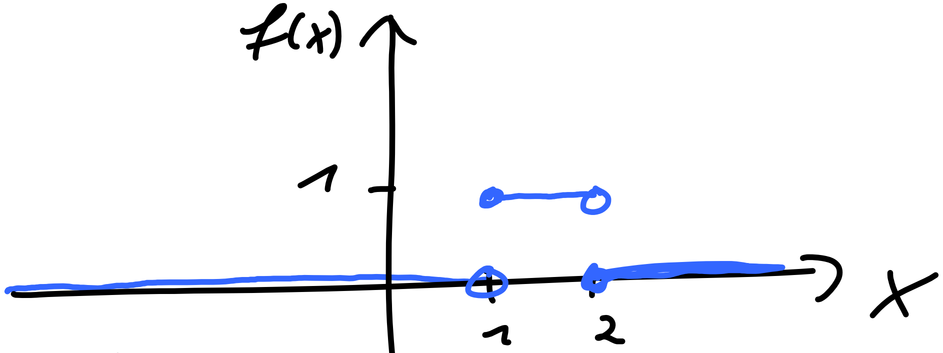
- $f(x) = \Theta(-x)$



- $f(x) = \Theta(x-2)$



- $f(x) = \Theta(x-1) - \Theta(x-2)$

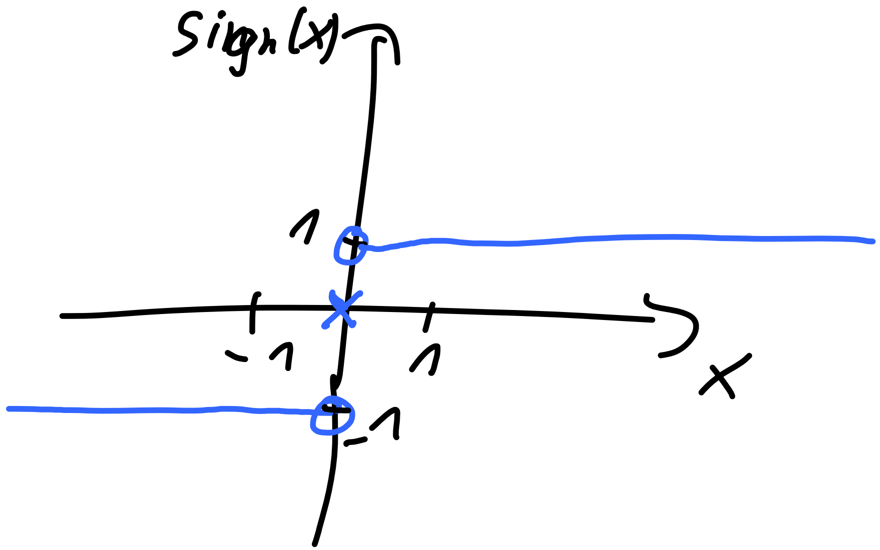


$$f(2) = \Theta(2-1) - \Theta(2-2)$$
$$= \underbrace{\Theta(1)}_{1} - \underbrace{\Theta(0)}_{1} = 1-1=0$$

$$f(3) = \Theta(3-1) - \Theta(3-2) = \Theta(2) - \Theta(1) = 1-1=0$$

(iii) Die Vorzeichenfunktion („Signumfunktion")

$$\boxed{\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}}$$



(Für $x \neq 0$ gilt: $\operatorname{sign} x = \dfrac{x}{|x|}$)

Potenz Funktionen

(i) Natürliche Exponenten

$$\boxed{\begin{aligned} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) &= x^n \quad (n\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}) \\ &= \underbrace{x\cdot x\cdot\ \dots\ x}_{n\text{-mal}} \end{aligned}}$$

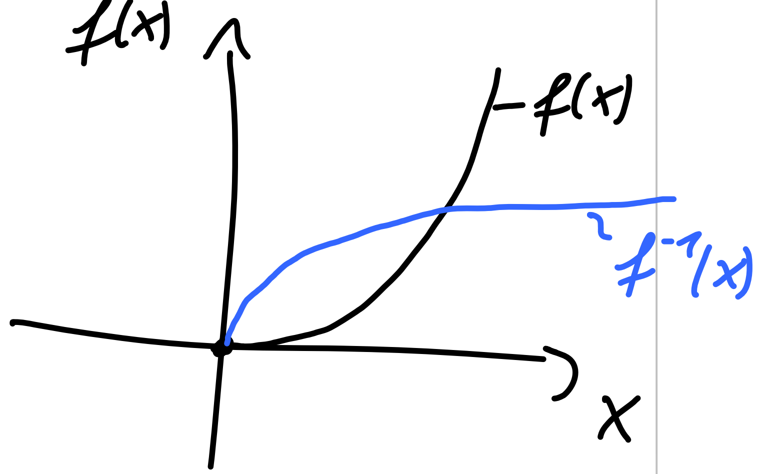
Fall 1 n = gerade $(n=2m)$

- gerade
- nicht injektiv
- nicht surjektiv

→ Nicht umkehrbar, es sei denn, man verkleinert $\mathbb{D}$ und wählt $\mathbb{W}=f(\mathbb{D})$

Standardmäßig nimmt man zum Umkehren:

$$\boxed{\begin{array}{l}\tilde{D} = [0,\infty) = \mathbb{R}_{+,0} \\ \tilde{W} = f(\tilde{D}) = [0,\infty)\end{array}}$$



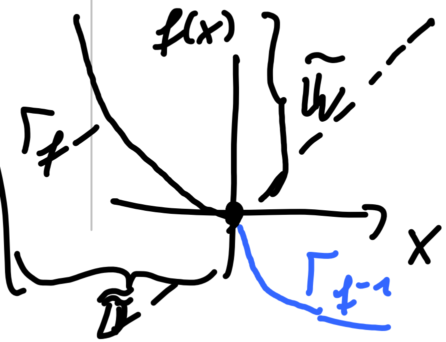
→ ist <u>bijektiv</u> und somit <u>umkehrbar</u>

$$\boxed{f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}}$$ ("<u>n-te Wurzel aus y</u>")

<u>Probe</u>: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^n) = \sqrt[n]{x^n} = x$

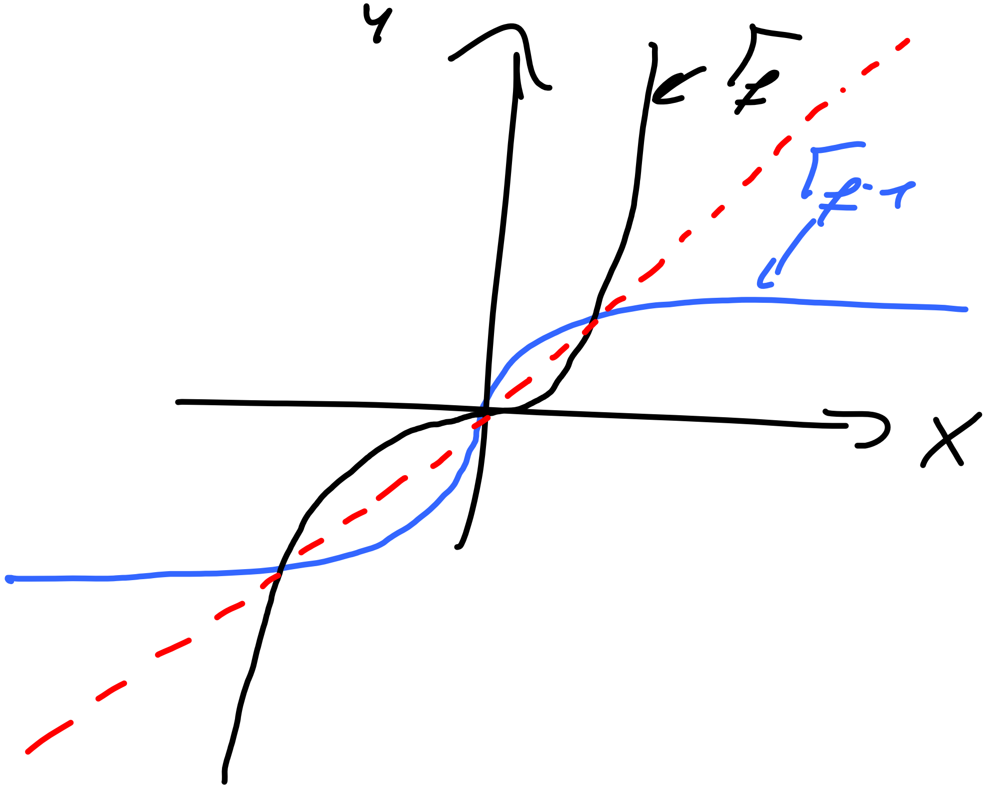
(<u>Alternativ</u>: $\tilde{D} = (-\infty, 0]$, $\tilde{W} = f(\tilde{D}) = [0,\infty)$

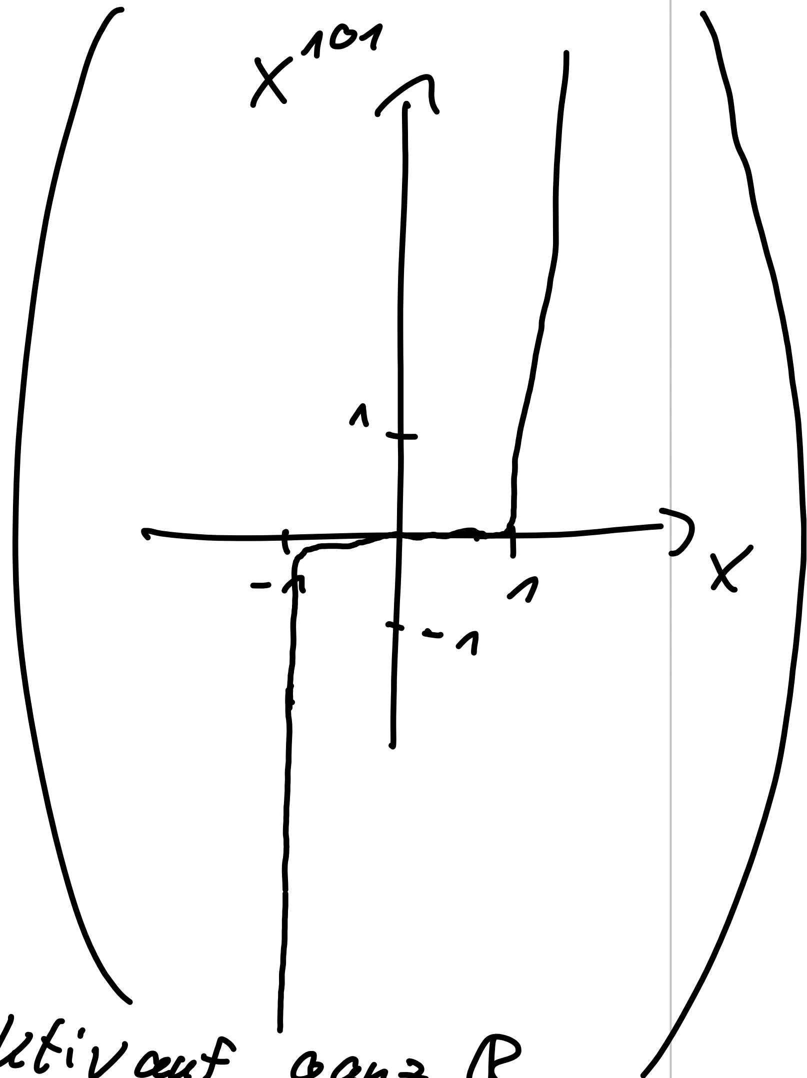
$$f^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$$)



Fall 2: n ungerade ($n = 2m+1$)

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^n}$$





Unterschiede zu n = gerade:

f ist
- ungerade
- unbeschränkt
- streng monoton steigend
- bijektiv auf ganz $\mathbb{R}$

↳ umkehrbar mit $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

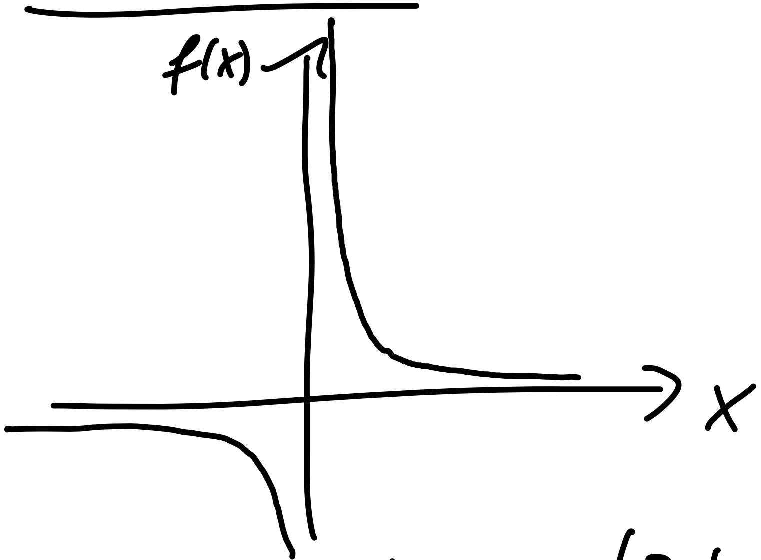
(ii) Negative Potenzen

$$\boxed{\begin{aligned} & f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \quad\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & f(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}}$$

Nicht definiert für $x = 0$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Qualitativ:



n ungerade

n gerade

(Pole n-ter Ordnung bei $x=0$)

(iii) Gebrochene Potenzen

$f: \mathbb{R}_{+,0} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = (x^n)^{\frac{1}{m}}$

$(n, m \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$x^0 := 1$ (Konvention)

Beispiel: $x^{\frac{(-3)}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{(\sqrt{x})^3}$

Polynomfunktionen

$$\boxed{\begin{aligned} &f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{aligned} &\text{mit } N \in \mathbb{N} \\ &\quad a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N \in \mathbb{R} \end{aligned} \right)$$

Terminologie:

- $f(x)$ ist ein Polynom vom Grad N
- $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N$ = "Die Koeffizienten des Polynoms"