Vorlesung 5 15.3.2012

Letztes Mal:

Polynomfunktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} & f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{aligned}}$$

$N \in \mathbb{N} \Rightarrow$ "Grad des Polynoms"
(Falls $a_N \neq 0$)

$a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N \in \mathbb{R}$ ("Koeffizienten des Polynoms")

Schreibweise:

Man schreibt auch:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N}}_{\text{"Summationssymbol", "Summenzeichen"}} a_n x^n}$$

z.B. • $\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$

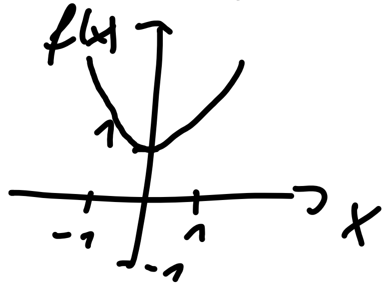
• $\sum_{n=0}^{3} a_n x^n$, mit $a_1 = a_2 = 0$, $a_0 = 3$, $a_3 = 2$

$$\sum_{n=0}^{3} a_n x^n = 2x^3 + 3$$

Einige Eigenschaften:

- Polynome sind überall **stetig**
- Jedes Polynom N-ten Grades hat **höchstens N Nullstellen**

(Können auch weniger oder gar keine sein, z.B.: $f(x) = x^2+1$



$\Rightarrow N_f = \emptyset$

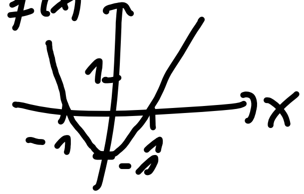
- $f(x) = x^2 \Rightarrow N_f = \{0\}$)

- Besitzt ein Polynom $f(x)$ N-ten Grades N Nullstellen $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$, so faktorisiert es:

$$\boxed{f(x) = a_N (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_{N-1})(x-x_N)}$$

("**Linearfaktorzerlegung**")

Beispiel: $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow N_f = \{-1, 1\}$



$\Rightarrow f(x) = 1 \cdot (x+1)(x-1)$ → stimmt (3. Binomische Formel)

- Existiert eine Faktorisierung der Form

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot \left(\begin{array}{l}\text{Rest-Polynom, bei} \\ \text{dem } x_0 \text{ keine Nullstelle} \\ \text{mehr ist}\end{array}\right)$$

$(k \in \mathbb{N})$

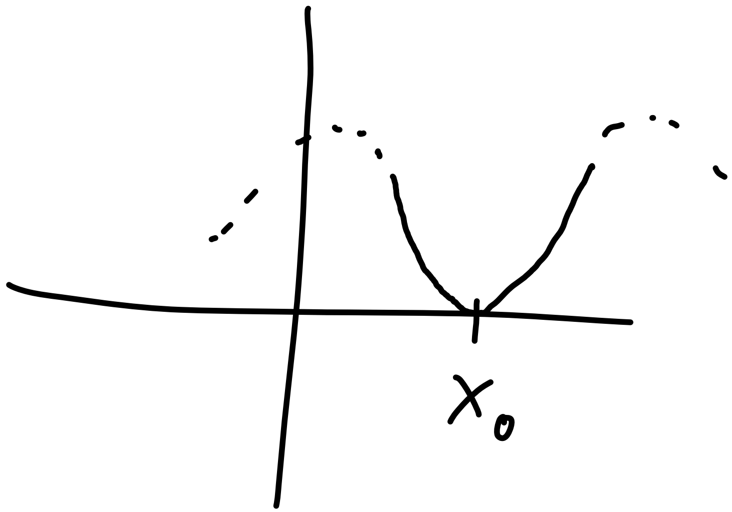
$\Rightarrow$ Man sagt: "$f(x)$ hat bei $x = x_0$ eine <u>k-fache Nullstelle</u> (bei $k=2$ "doppelte")"

Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1)$

$$= x^2 (x-1)^2$$
$$= (x-0)^2 (x-1)^2$$

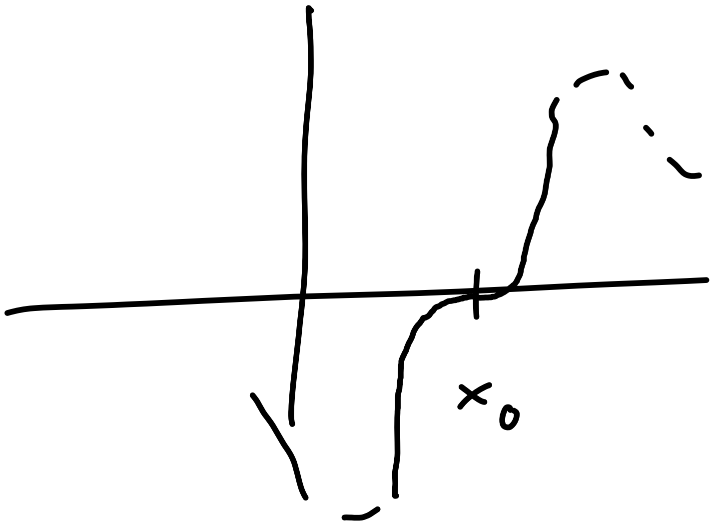
$\Rightarrow$ $x=0$ und $x=1$ sind jeweils doppelte Nullstellen.

Bei einer doppelten Nullstelle x_0:

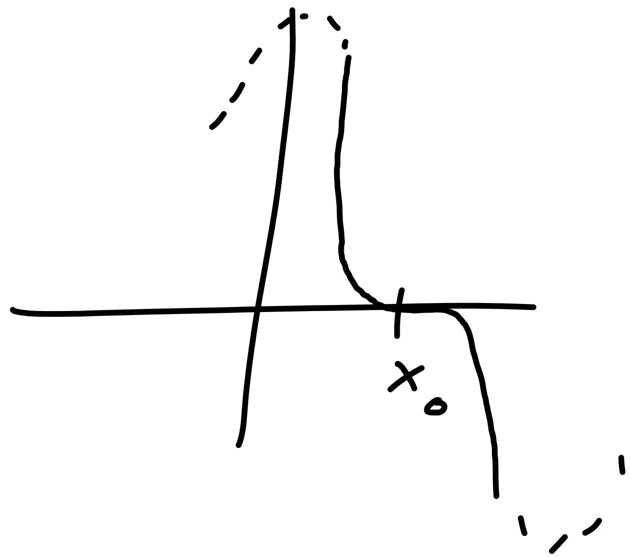


oder

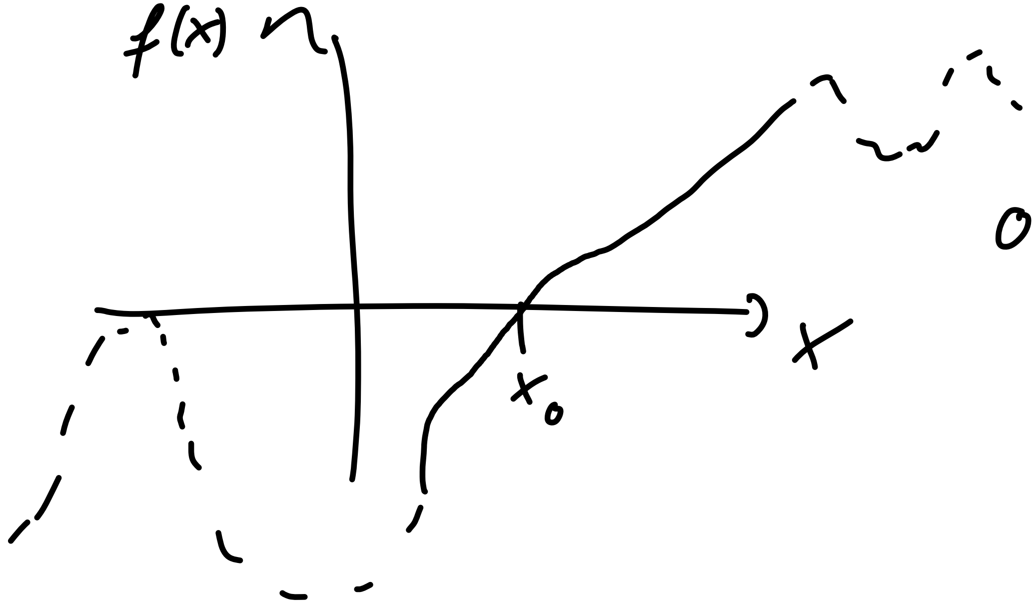
Bei einer dreifachen Nullstelle x_0:



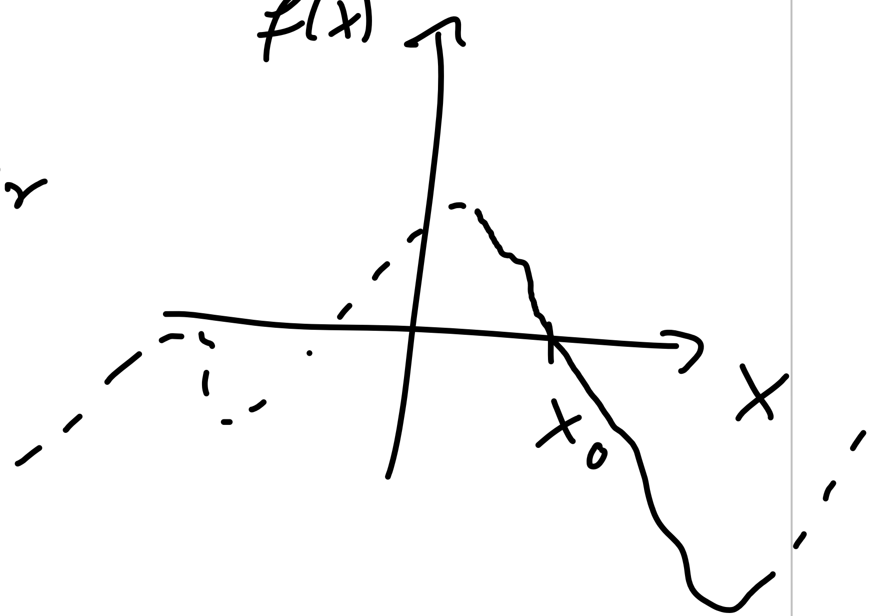
oder



Bei einfacher Nullstelle bei x_0:



oder



Rationale Funktionen (auch "gebrochen rationale Funktion")

Seien

- $g(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ ein Polynom N-ten Grades
- $h(x) = \sum_{m=0}^{K} b_m x^m$ ein Polynom K-ten Grades

$(K, N \in \mathbb{N})$

dann bezeichnet man die Funktion

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}{\sum_{m=0}^{K} b_m x^m}}$$

als (gebrochen) rationale Funktion.

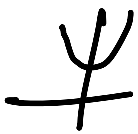
Wichtig:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus N_h$$

Nullstellen von $h(x)$ müssen aus $\mathbb{D}_f$ herausgenommen werden, damit $f = \frac{g}{h}$ überhaupt wohldefiniert ist.

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0 \}$$

Beispiele:



- $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+5}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, weil $3x^2+5=0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat (Nenner hat <u>keine</u> Nullstellen)

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \equiv \mathbb{R}^*$

- $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- $f(x) = x^2 = \frac{x^2}{1}$ $\quad , D_f = \mathbb{R}$

(Polynome sind spezialfäle rationaler Funktionen (solche mit $h(x) = 1$))

Polstellen

x_0 heißt Polstelle von f, wenn

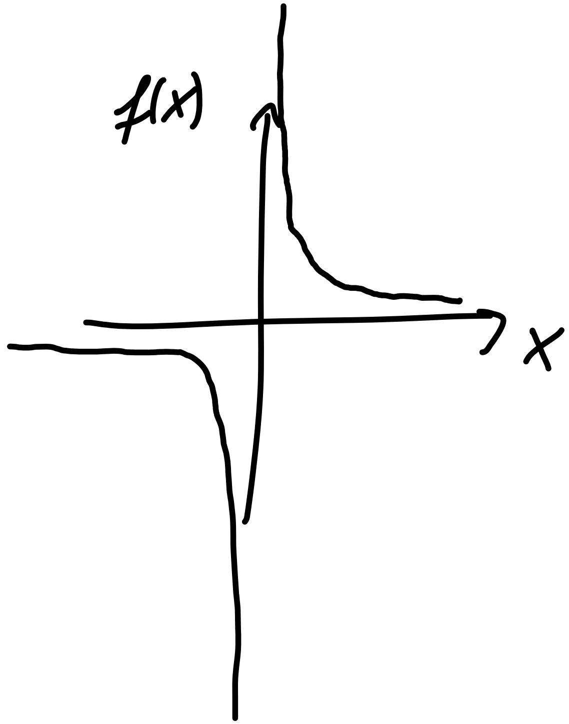
- x_0 eine Definitionslücke von $f = \frac{g}{h}$ (also eine Nullstelle von h)

und

- der Betrag $|f(x)|$ immer größer wird (gegen ∞ strebt) wenn x sich x_0 annähert.

Beispiele:

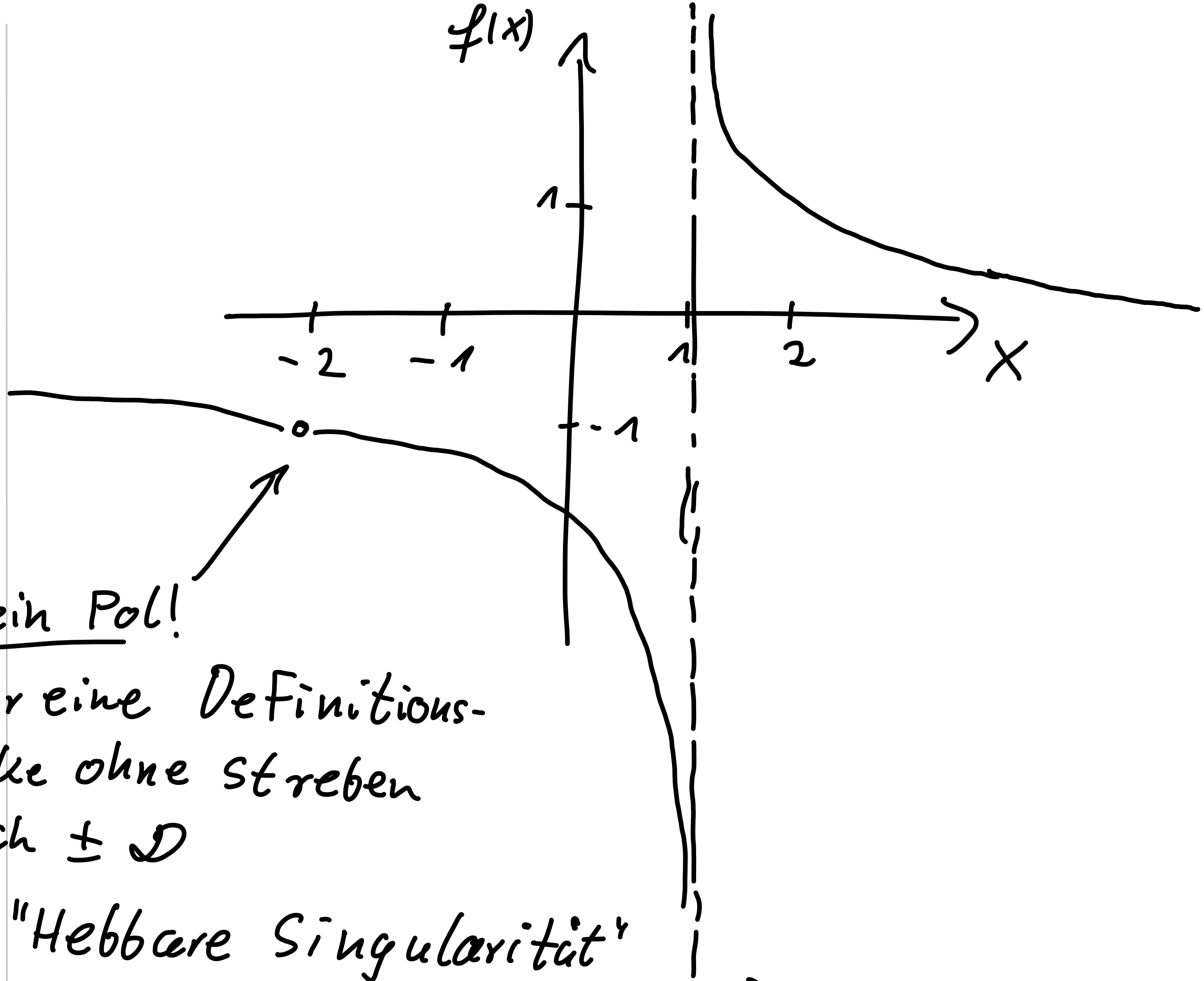
(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathbb{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\Rightarrow x = 0$ ist eine Polstelle.

(ii) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+x-2} \begin{matrix} \} g(x) \\ \} h(x) \end{matrix}$ $\quad N_h = \{-2, 1\} \Rightarrow \mathbb{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

<u>Aber:</u> $f(x) = \dfrac{2x+4}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)}$



Kein Pol!

Nur eine Definitions-
lücke ohne streben
nach $\pm \infty$

→ "Hebbare Singularität"

bei $x = -2$

echte Polstelle bei $x = 1$

$\tilde{f}(x) = \frac{2}{(x-1)}$ hat $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cancel{(x+2)}} = \tilde{f}(x) \quad \forall \; x \neq -2$

$\Rightarrow$ Ersetze f durch $\tilde{f}$ und eliminiere die (etwas künstliche) Definitionslücke bei $x = -2$ ($\Rightarrow$ "Hebbare Singularität)

Anderes Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = x \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R}$$

Die Exponentialfunktion

$$\boxed{\begin{aligned} &\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ &\exp : x \mapsto \exp(x) := e^x \end{aligned}}$$

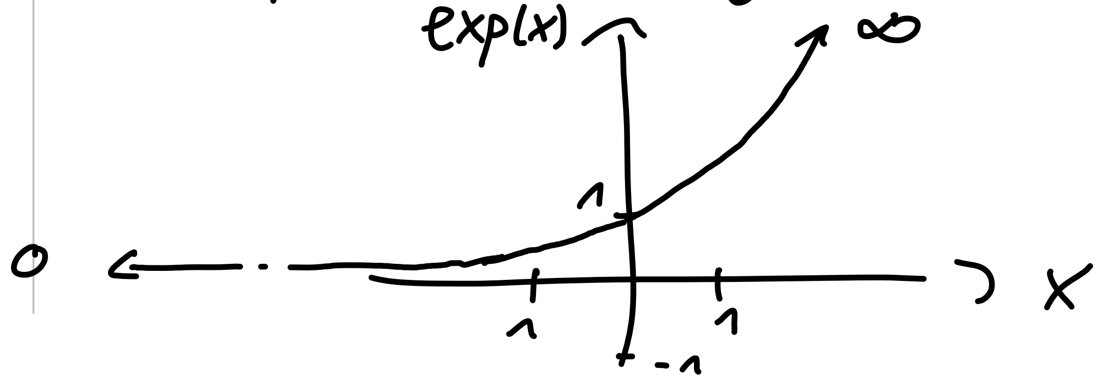
Hierbei:

$$\boxed{\begin{aligned} &e = 2{,}71828182\ldots \\ &\text{(Euler'sche Zahl)} \end{aligned}}$$

Eigenschaften:

- $\exp(0) = e^0 = 1$
- $\exp(1) = e^1 = e$
- $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$
- $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

  $\Rightarrow e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$
- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- exp ist streng monoton steigend und stetig:



- $\exp(x_1 \cdot x_2) = \left(\exp(x_1)\right)^{x_2}$

  $= \left(\exp(x_2)\right)^{x_1}$

<u>Wichtig:</u>

$\exp(x)$ wächst schneller als jede Potenz von x:

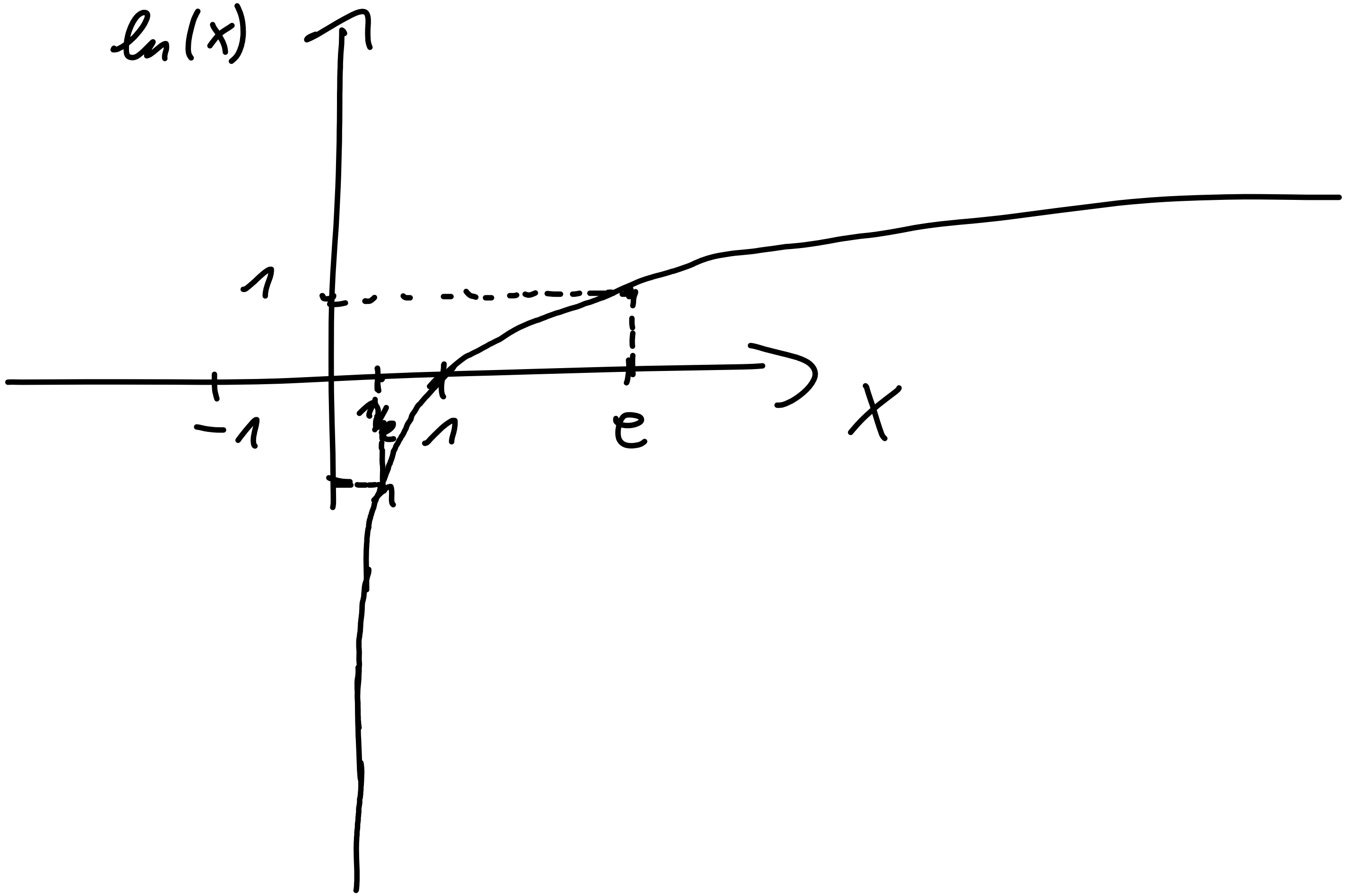
$$\boxed{\frac{\exp(x)}{x^n} \xrightarrow{x\to\infty} \infty \quad (\text{egal wie groß } n \text{ ist!})}$$

<u>Umkehrfunktion:</u> ($\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv)

$$\boxed{\begin{aligned} \ln: \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x) \end{aligned}}$$

Umkehrfunktion, nicht Kehrwert!

"Logarithmus naturalis" alias
"Natürlicher Logarithmus" alias
"Logarithmus"



<u>Eigenschaften:</u>

- $\ln(1) = 0$ (denn $e^0 = 1$)
- $\ln(e) = 1$ (denn $e^1 = e$)
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ (denn $e^{-1} = \frac{1}{e}$)

- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$

  $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \cdot \ln(x)$
- $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$

  ($\ln = \exp^{-1}$)
- $\ln(0)$ ist nicht wohldefiniert ($\ln(x) \xrightarrow{x \to 0} -\infty$)

- ln ist monoton steigend und stetig
- ln wächst langsamer als jede n-te Wurzel:

$$\boxed{\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \qquad \left(\text{obwohl } \ln x \xrightarrow{x\to\infty} \infty\right)}$$

Wichtige, aus exp oder ln ableitbare Funktionen:

Exponentialfunktion mit Basis $a>0$

$$\boxed{f(x) = a^x = (\underbrace{e^{\ln a}}_{a})^x = e^{x \ln a} = (e^x)^{\ln a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ a^{x_1 \cdot x_2} &= (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} \end{aligned}}$$

Lorithmus zur Basis $a>0$

$\log_a(x) :=$ Umkehrfunktion von a^x

(also: $\log_a(a^x) = x$)

$$\Rightarrow \log_a(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

Probe: Es muss gelten: $\log_a(a^x) \overset{!}{=} x$

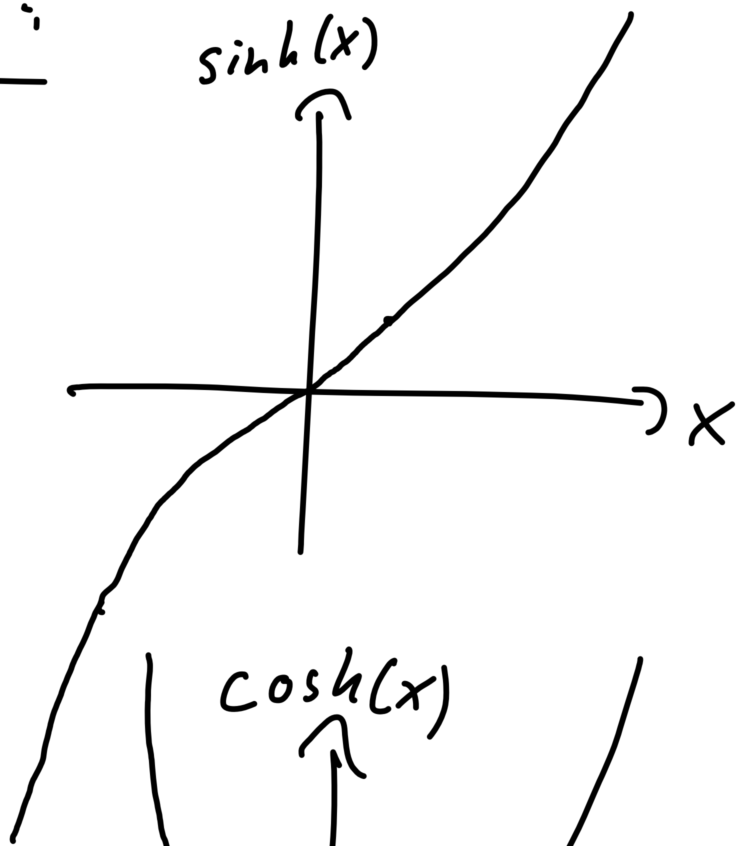
$$\log_a(a^x) = \log_a\left(e^{x \ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln\left(e^{x \ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\ln a}} \cdot x \cancel{\ln a} = x$$

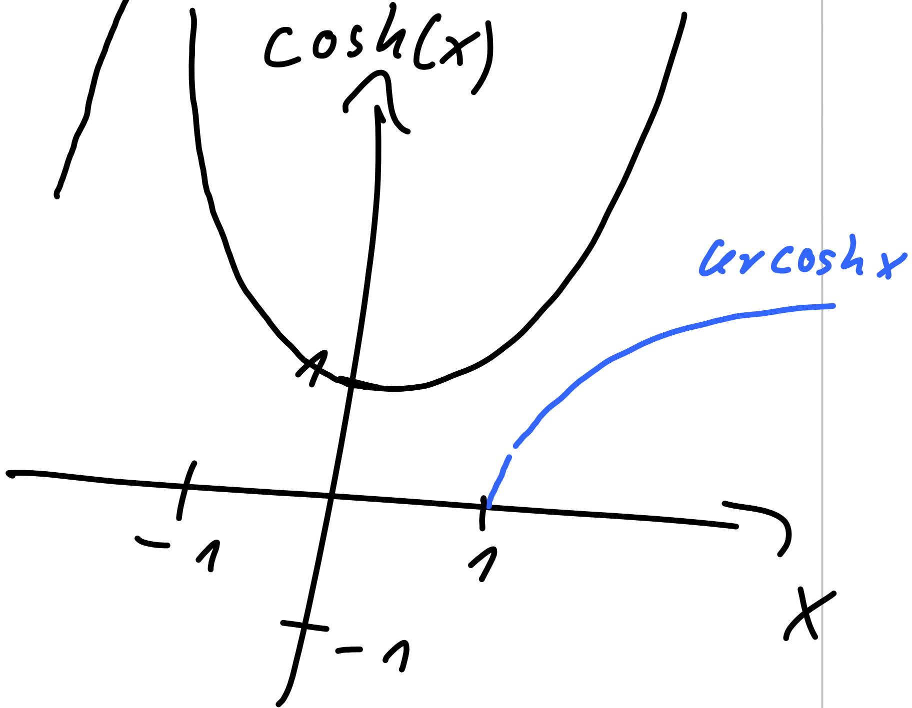
✓

Hyperbolische Funktionen:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &\sinh(x) := \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned}&\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)\\ &\cosh(x) := \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\end{aligned}}$$

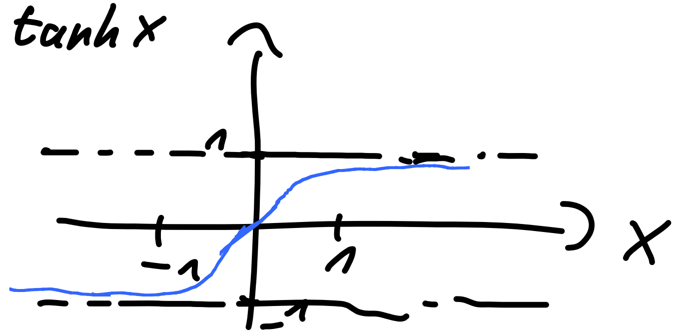


$$\Rightarrow \boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

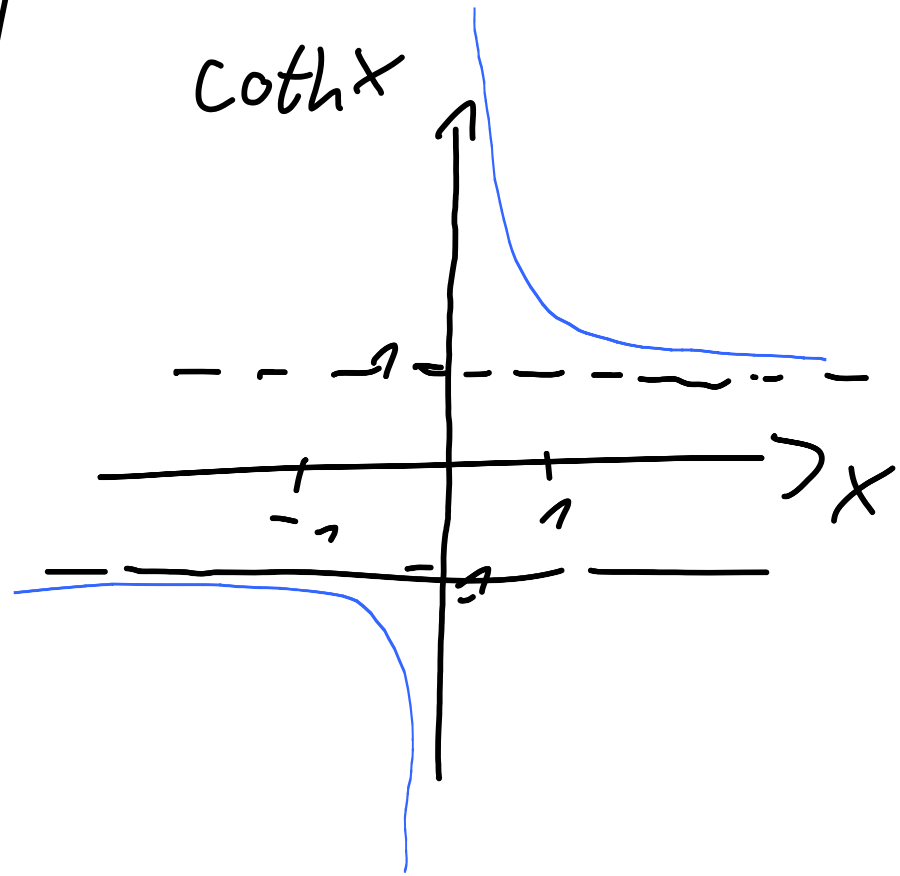
$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

tanh x



coth x



Umkehr-Funktionen "

arsinh x

arcosh x

artanh x

arCoth x