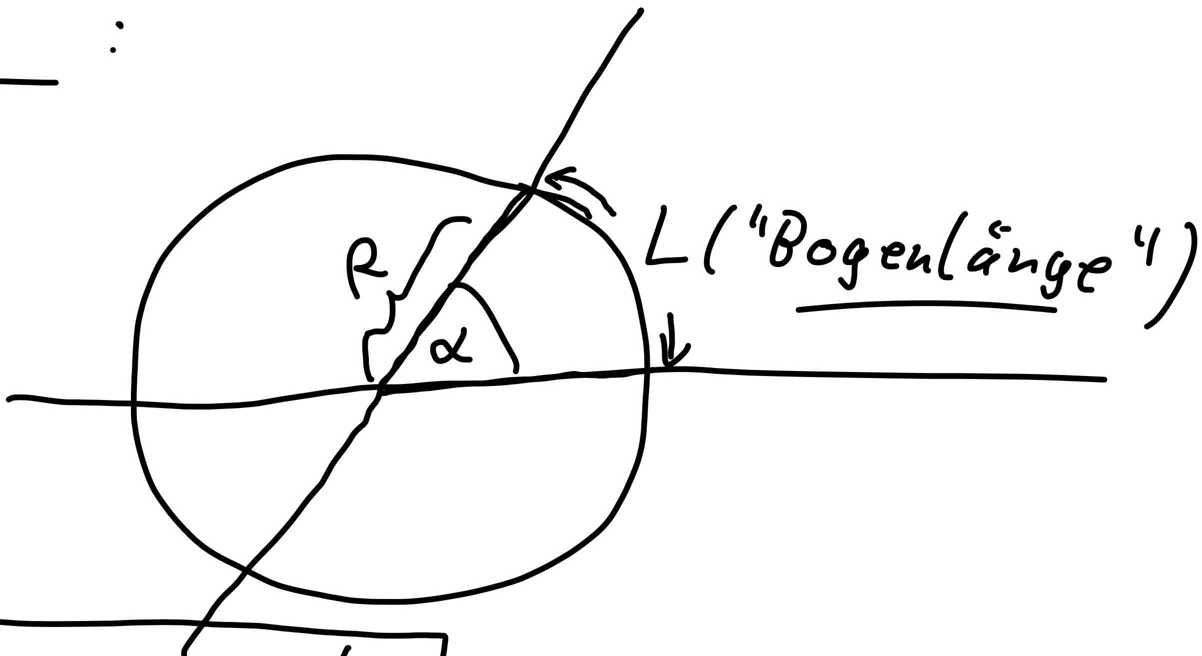
Vorlesung 6 18. 3. 2019

Trigonometrische Funktionen

Vorbemerkung:

Sofern nicht anders vereinbart, messen wir Winkel nicht in Grad, sondern im **Bogenmaß**:



$$\boxed{\alpha \text{ (im Bogenmaß)} := \frac{L}{R}}$$

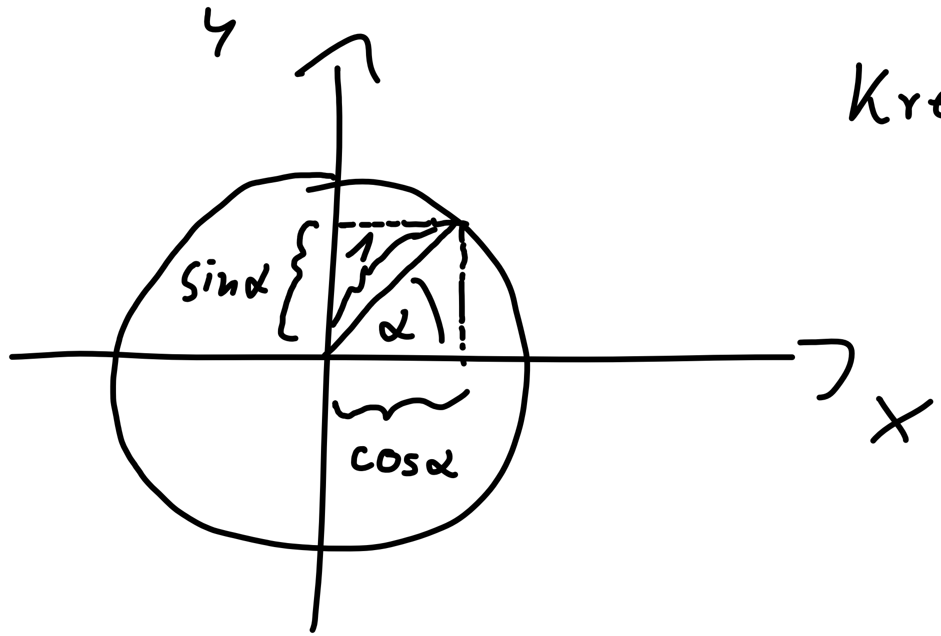
Umrechnungsformel

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha\,(\text{im Pogenmaß}) &= \frac{2\pi}{360^\circ}\cdot\alpha\,(\text{in Grad}) \\ &= \frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha\,(\text{in Grad})\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$

Bogenmaß	Grad
2π	360°
$3/2\,\pi$	270°
π	180°
$\pi/2$	90°
$\pi/4$	45°
$\frac{\pi}{6}$	30°

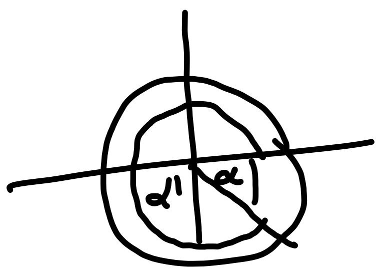
Sinus und Cosinus



Kreis vom Radius 1

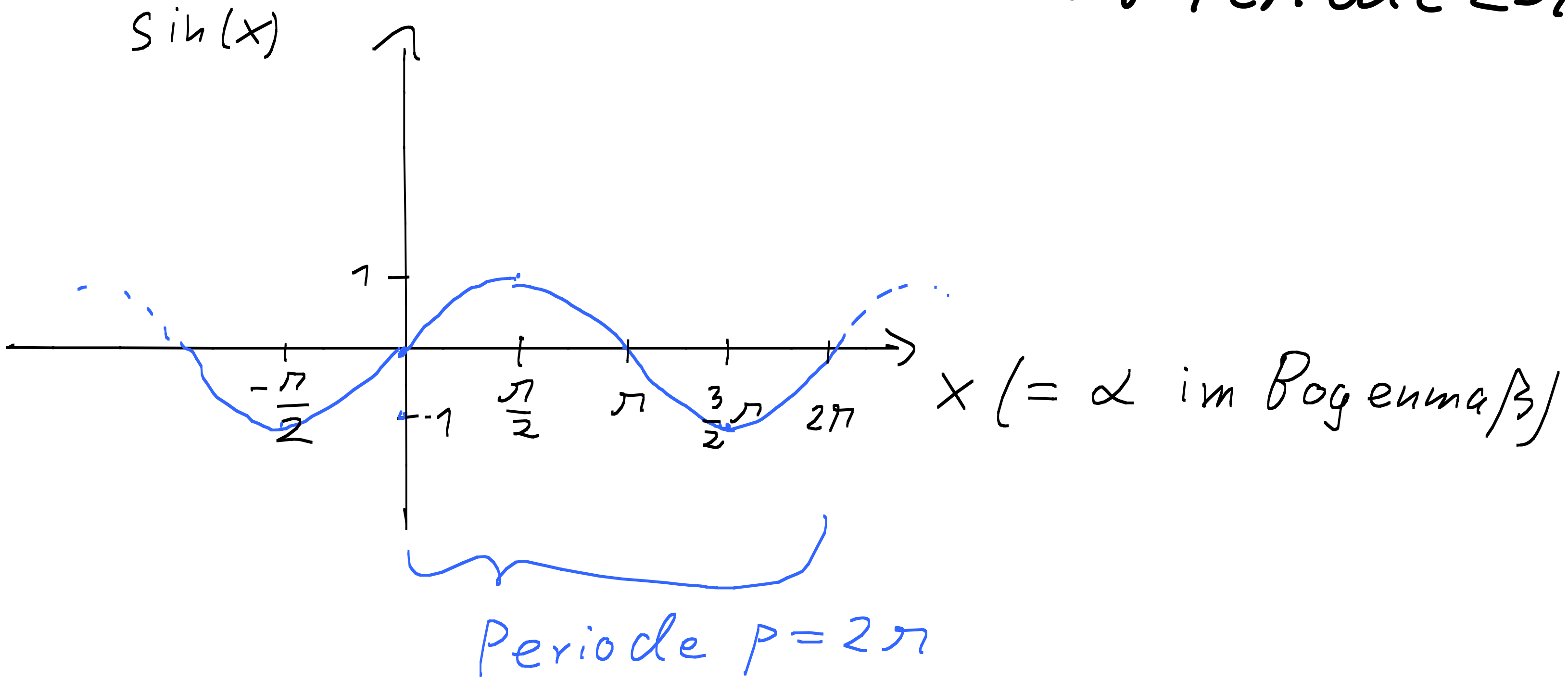
Bemerkungen:

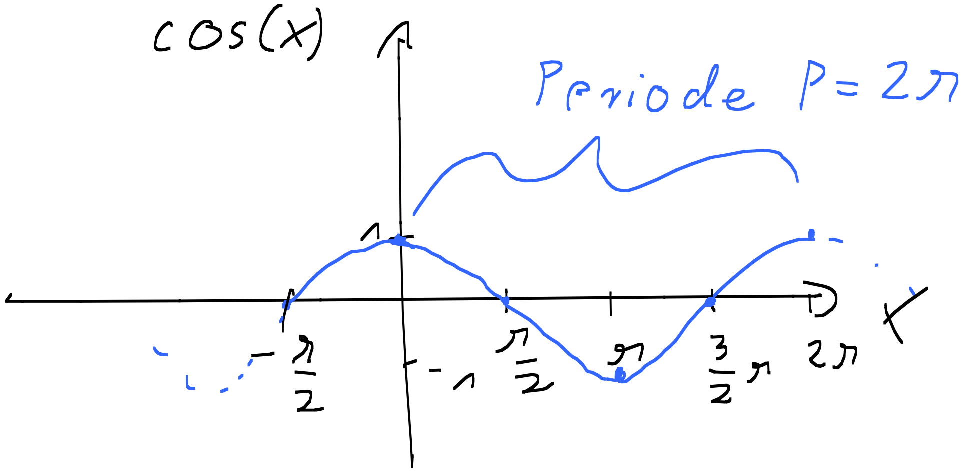
- $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ ($\Leftrightarrow$ Satz des Pythagoras)
- α kann auch negativ sein, z.B.



$$\alpha = -\frac{\pi}{4}, \quad \alpha' = +\frac{7}{4}\pi$$

- $$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ sin und cos sind periodisch mit Periode 2π





Eigenschaften

<u>sin</u>:

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{D}) = [-1, 1]$
- Ungerade
- Nullstellen $x_n = n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$
- „Kleinwinkelnäherung"

$$\sin(x) \approx x \quad (\text{Für } |x| \ll 1)$$

(mehr später) →

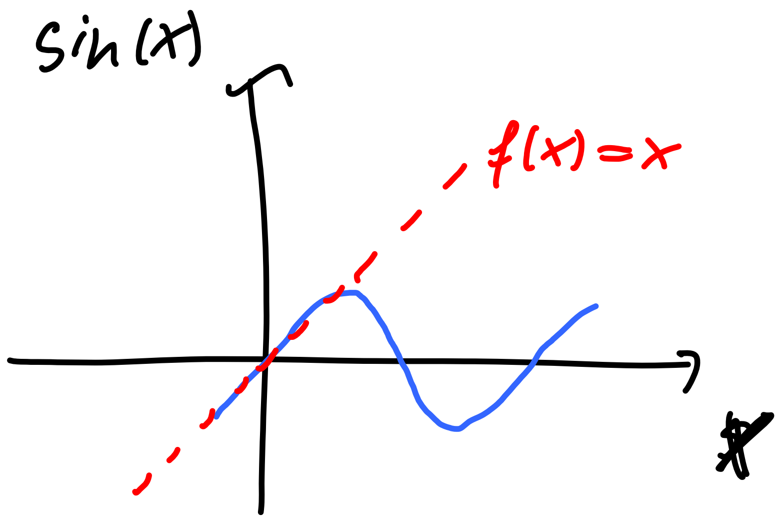
Bogenmaß! (In Grad stimmt dies so nicht)

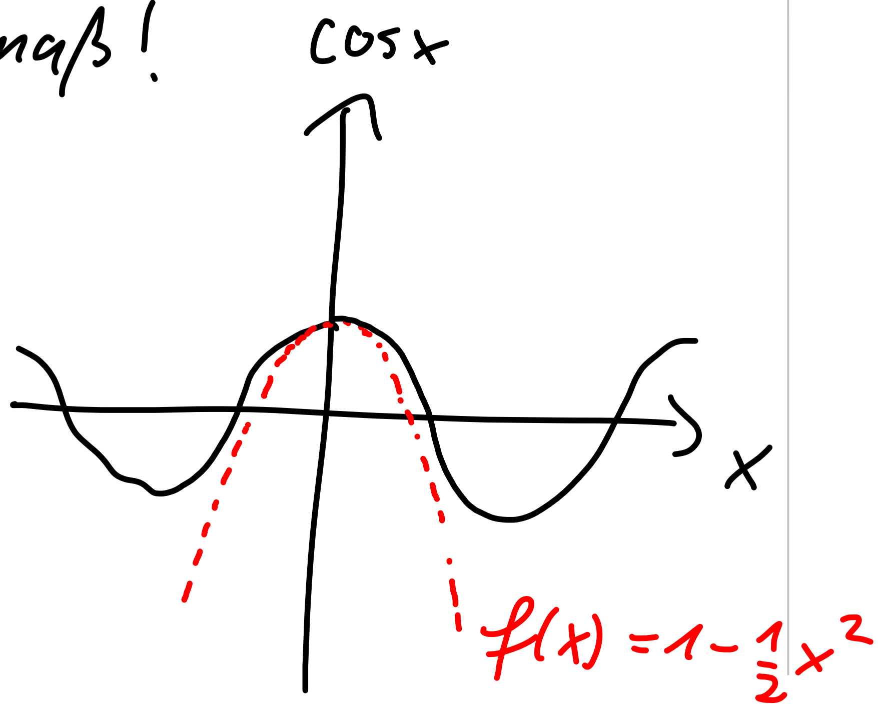
<u>cos</u>

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{D}) = [-1,1]$
- Gerade
- Nullstellen $x_n = (n+\frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
- "Kleinwinkelnäherung"

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{Für } |x| \ll 1)$$

Bogenmaß!





Tangens und Cotangens

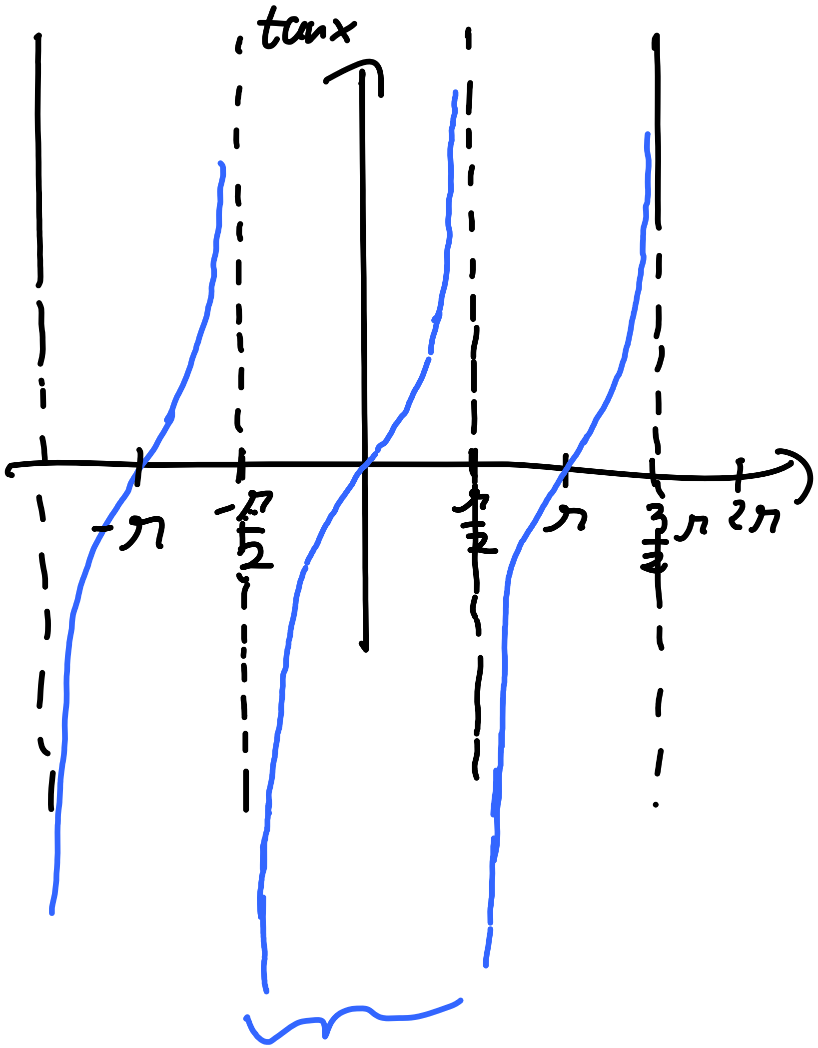
- $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \Big(\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ (n+\tfrac{1}{2})\pi \} \Big)$

  $n \in \mathbb{Z}$

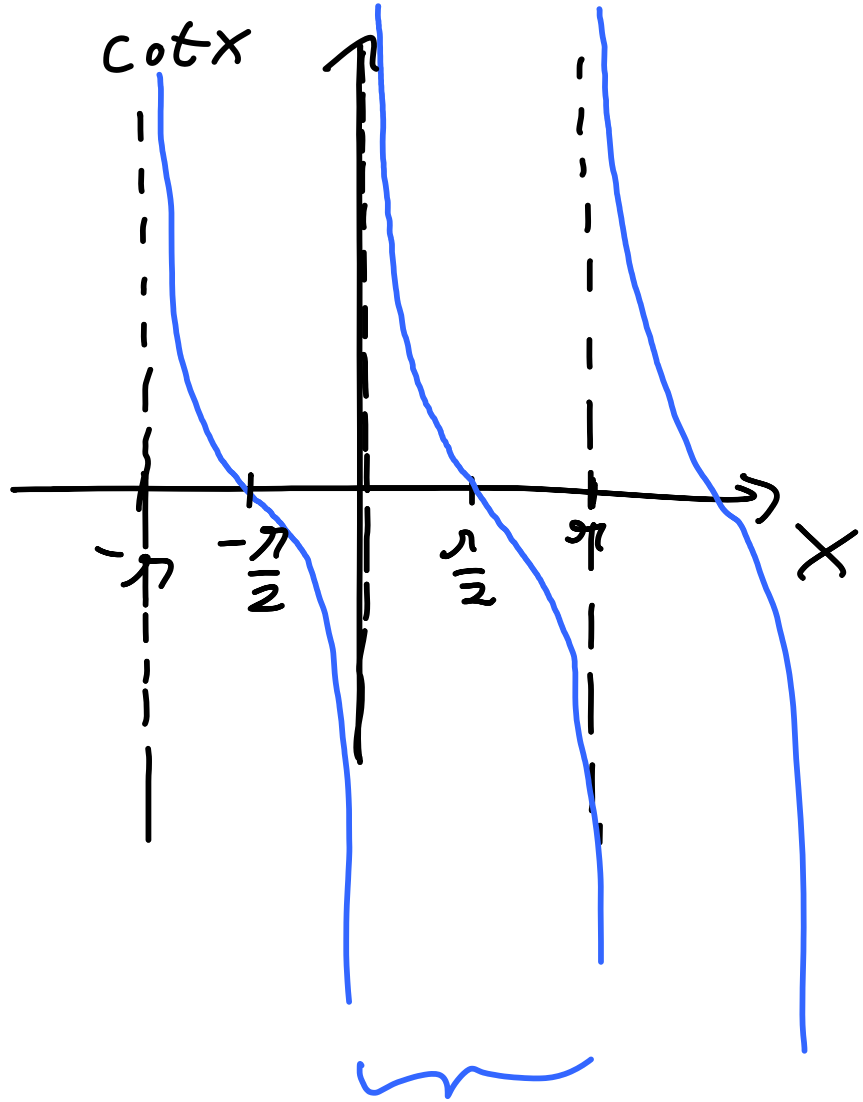
  Nullstellen von $\cos(x)$ müssen aus $\mathbb{D}$ herausgenommen werden

- $\cot(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ $\quad \Big(\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ n\pi \} \Big)$

  Nullstellen von $\sin(x)$

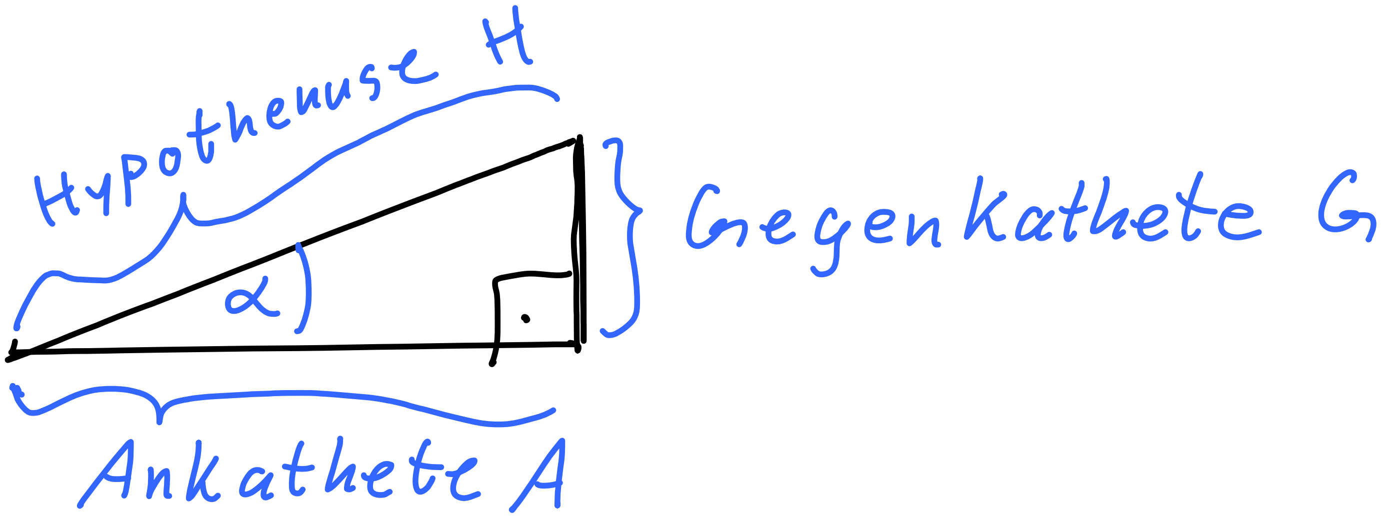


Periode $p = \pi$



Periode $p = \pi$

Rechtwinklige Dreiecke:

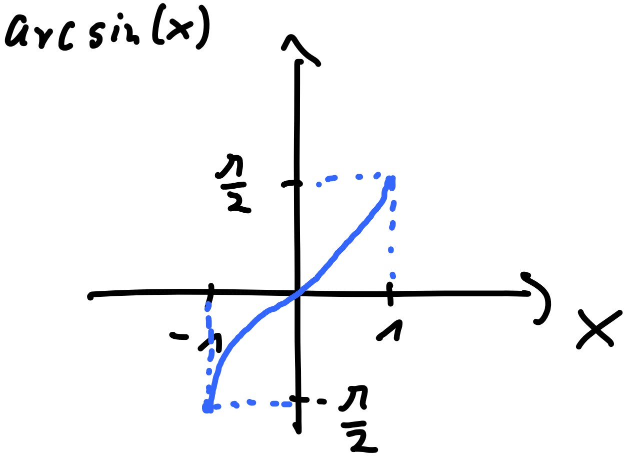


$$\boxed{\begin{aligned} \frac{G}{H} &= \sin\alpha \\ \frac{A}{H} &= \cos\alpha \\ \frac{G}{A} &= \tan\alpha \end{aligned}}$$

Umkehrfunktionen:

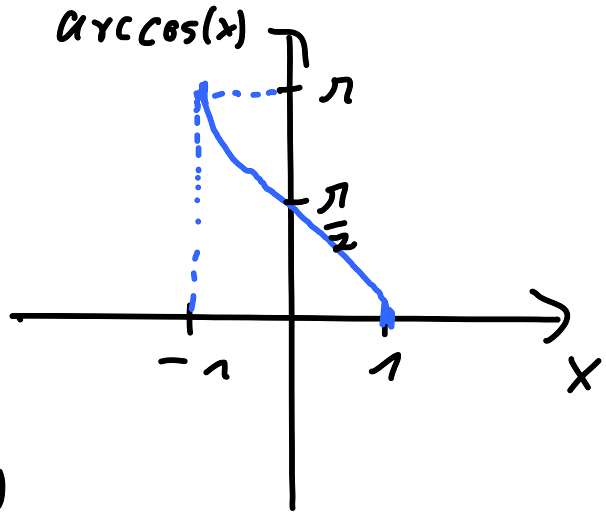
- $\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$

  $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



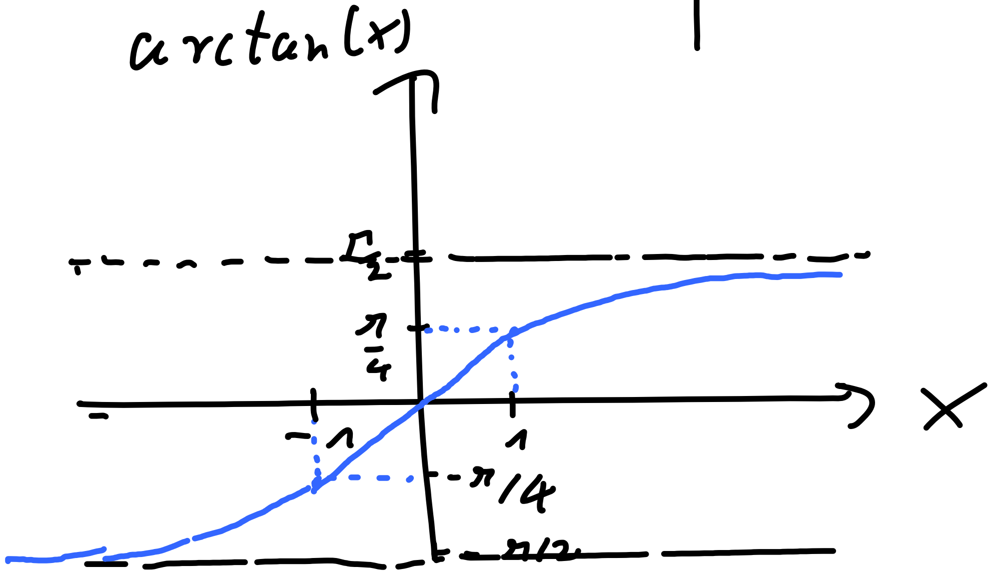
- $\arccos(x) := \cos^{-1}(x)$

  $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$



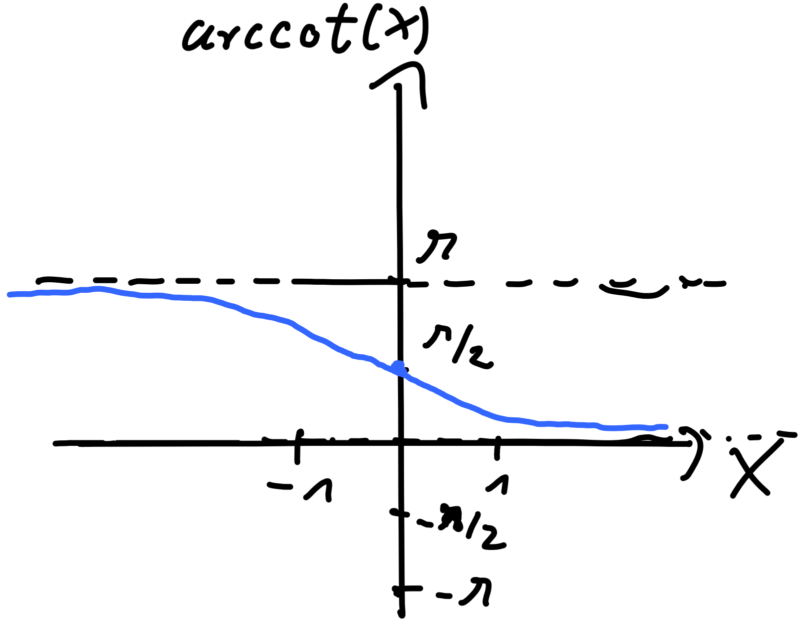
- $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$

  $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



- $\operatorname{arccot}(x) := \cot^{-1}(x)$

  $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$



1.5 Grenzwerte von Folgen und Funktionen

(Reelle) Folgen:

Eine (reelle) Folge (a_n) ist eine "Liste" reeller Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$, die mit den natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ durchnummeriert sind:

Beispiele

(i)
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad \vdots \quad (a_n = n)$$

(ii)
$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \vdots \quad \left(a_n = \frac{1}{n}\right)$$

(iii)
$$a_1 = -1, \quad a_2 = +1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = +1, \quad \vdots \quad (a_n = (-1)^n)$$

Eine Folge (a_n) kann formal als eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) := a_n$ aufgefasst werden (und wird in der Mathematik auch so definiert)

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ heißen die <u>Glieder</u> der Folge.

<u>Eine Folge heißt:</u>

- $\left\{\begin{array}{l}\text{nach oben beschränkt}\\ \text{nach unten beschränkt}\\ \quad\text{beschränkt}\end{array}\right\}$, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$

gibt, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left\{\begin{array}{l} a_n \leq s \\ a_n \geq s \\ |a_n| \leq s \end{array}\right\}$.

- <u>(streng) monoton wachsend</u>, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} > a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

"streng"

- <u>(streng) monoton fallend</u>, wenn

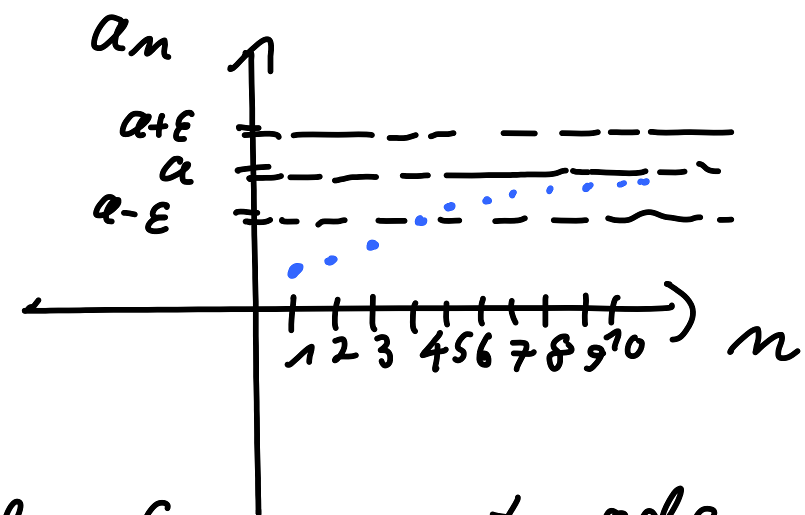
$$a_{n+1} \leq a_n \quad (a_{n+1} < a_n)$$

Konvergenz einer Folge

Eine Folge (a_n) heißt Konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit Folgender Eigenschaft gibt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{Für alle } n > N}$$

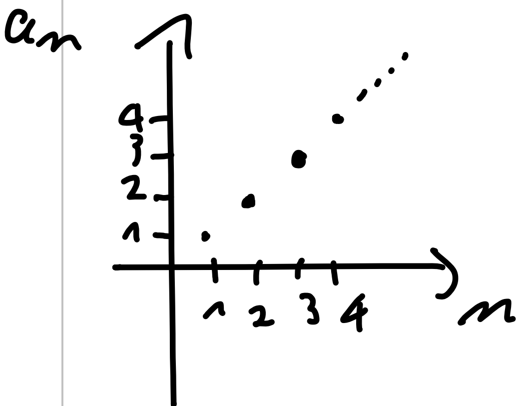


a heißt der <u>Grenzwert</u> oder <u>Limes</u> der Folge, und man schreibt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \left(\text{oder } a_n \to a \text{ Für } n \to \infty \quad \text{oder } a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \right)}$$

Beispiele:

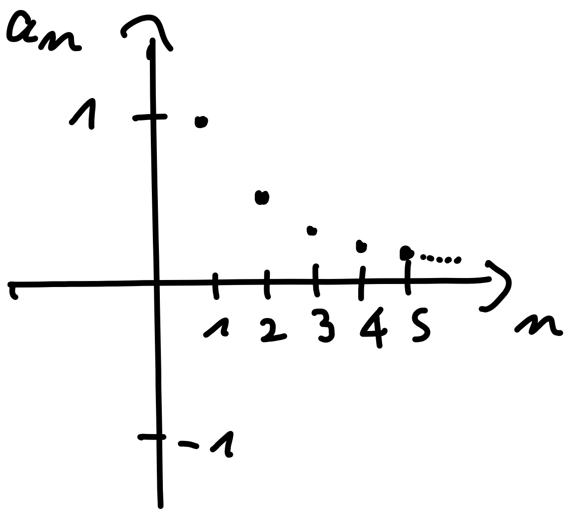
(i) $a_n = n$ $\quad (a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ \dots)$



$\Longrightarrow$

- nach unten beschränkt ($a_n \geq 1$)
- nach oben unbeschränkt
- streng monoton wachsend ($a_{n+1} = n+1 > n = a_n$)
- Nicht Konvergent

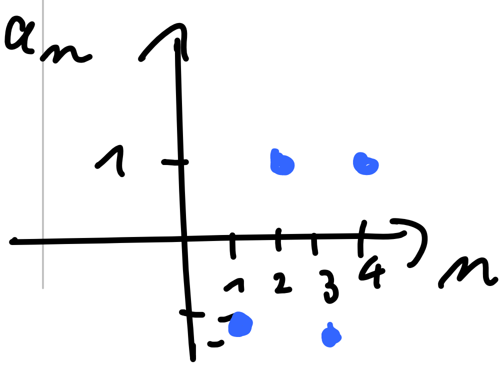
(ii) $a_n = \frac{1}{n}$



- Beschränkt $\left(1 \geq a_n \geq 0\right)$
- Streng monoton fallend $\left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right)$
- Konvergent: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Für } \varepsilon > 0 \text{ und } n > N := \frac{1}{\varepsilon} \text{ gilt:} \\ |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{n > N}{<} \frac{1}{N} = \varepsilon \end{array} \right)$$

(iii) $a_n = (-1)^n$



- Beschränkt $(-1 \leq a_n \leq 1)$
- Weder monoton wachsend noch fallend
- nicht konvergent

Grenzwerte von Funktionen

Seien:

- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion
- $x_0 \in \mathbb{R}$ so dass es eine Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{D}$ gibt, die gegen x_0 konvergiert:

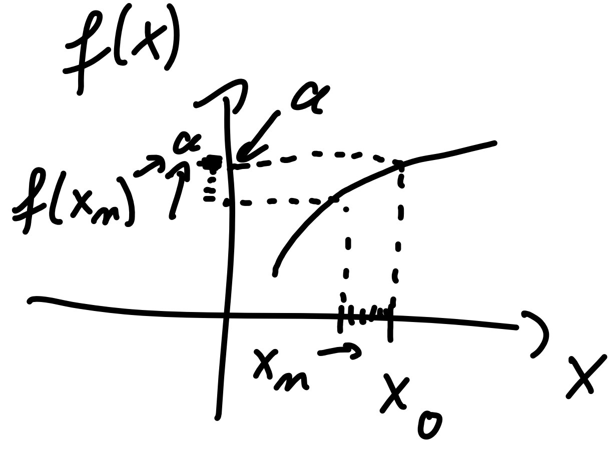
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \left(x_n \in \mathbb{D} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \right)}$$

$\Rightarrow$ x_0 kann in $\mathbb{D}$ liegen, aber z.B. auch Randpunkt eines (halb) offenen Intervalls sein, der nicht mehr zu $\mathbb{D}$ gehört.

z.B. $\mathbb{D} = (0,2) \Rightarrow x_0 \in [0,2]$

(Folgen z.B.: Für $x_0 = 0$: $x_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{D} = (0,2)$)
$x_0 = 2$: $x_n = 2 - 1/n \in \mathbb{D} = (0,2)$

Dann hat f an der Stelle x_0 den Grenzwert a, wenn für <u>jede</u> Folge (x_n) mit $\underline{x_n \in D}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

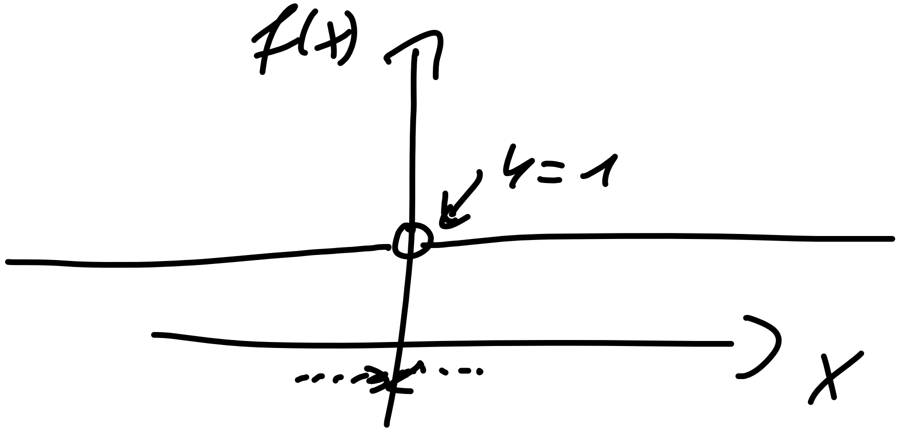


$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a}$$

<u>Beispiele:</u>

(i) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{x}{x}$



Für $x_0 = 0$ gilt:

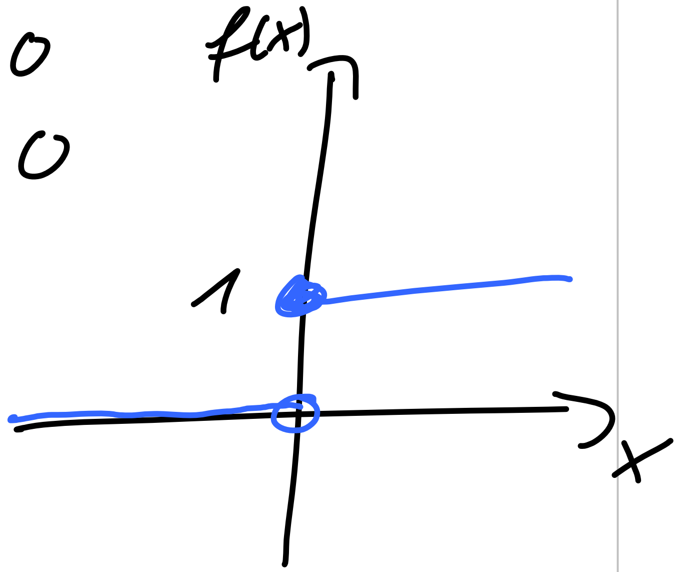
Sei x_n eine Folge in $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (also $x_n \neq 0$)

mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$$\Rightarrow f(x_n) = \frac{x_n}{x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ x_n \neq 0}}{=} 1 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$\Rightarrow f$ hat bei $x_0 = 0$ den Grenzwert $a = 1$

(ii) $f(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{Für } x < 0 \\ 1 & \text{Für } x \geq 0 \end{cases}$



f hat <u>~~Keinen~~ Keinen</u> Grenzwert bei $x_0 = 0$, denn die Folgen

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \frac{1}{n} \\ \hat{x}_n = -\frac{1}{n} \end{array}\right\} \text{Konvergieren beide gegen } x_0 = 0 \text{, aber:}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = 0 \neq 1$$