Vorlesung 7

19. 3. 2019

Letztes Mal:

Grenzwert einer Funktion

seien:
- $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion
- $x_0 \in \mathbb{R}$ ein möglicher Grenzwert einer Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{D}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(Schreibfehler beim letzten Mal:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (statt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$)

richtig   Falsch)

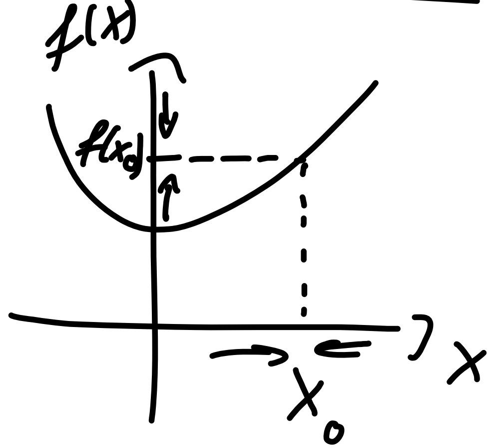
Dann hat f an der Stelle x_0 den Grenzwert a, wenn für jede Folge von Punkten $x_n \in \mathbb{D}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a}$ ($f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$). Man schreibt dann: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a}$

Bemerkungen:

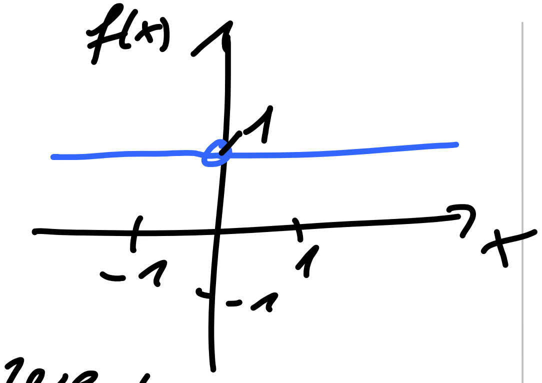
(i) Gehört $x_0 \in \mathbb{D}$ zu $\mathbb{D}$ und ist f stetig in x_0, so gilt:

$$\boxed{a = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$



(ii) Der Begriff des Grenzwertes von Funktionen lässt sich auch ohne Rückgriff auf Folgen definieren (mit einem "ε-δ-Kriterium" ähnlich wie bei der Stetigkeit)

Beispiele:



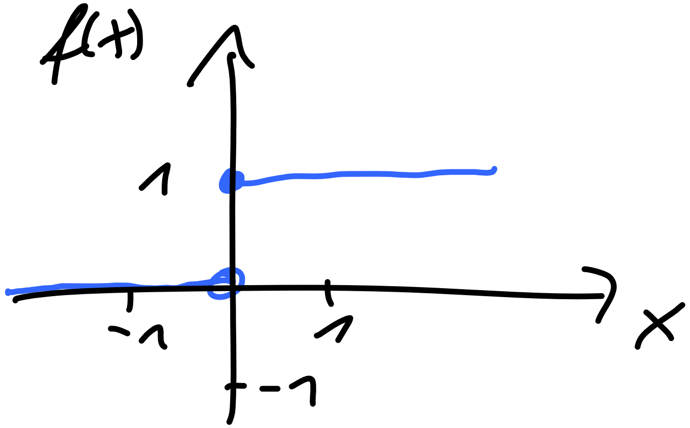
(i) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x}$

$\Rightarrow f$ hat für $x_0 = 0$ den Grenzwert 1

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 1}$$

($\Rightarrow f$ kann daher zur Funktion
$\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = 1$ "stetig fortgesetzt" werden (siehe die Diskussion zu "hebbaren Singularitäten" in Vorlesung 5))

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



$\Rightarrow f$ hat $x_0 = 0$ Keinen Grenzwert

$$\left(\begin{array}{l} f(\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 1 \\ f(-\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{array} \right)$$

Aber: Θ hat bei $x_0 = 0$ jeweils einen rechtsseitigen Grenzwert und einen linksseitigen Grenzwert.

Genauer:

Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte von Funktionen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Folgen $x_n \in D$, die gegen x_0 konvergieren.

Dann hat f bei x_0 den $\left\{ \begin{array}{l} \text{linksseitigen} \\ \text{rechtsseitigen} \end{array} \right\}$ Grenzwert a, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n < x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n > x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a}$$

Man schreibt:

$$\boxed{\left\{\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a\right\} \quad \left(\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a\right)}$$

$$\lim_{x \to x_0+} \qquad \lim_{x \to x_0-}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \nearrow 0} \Theta(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} \Theta(x) = 1$$

Bemerkung:

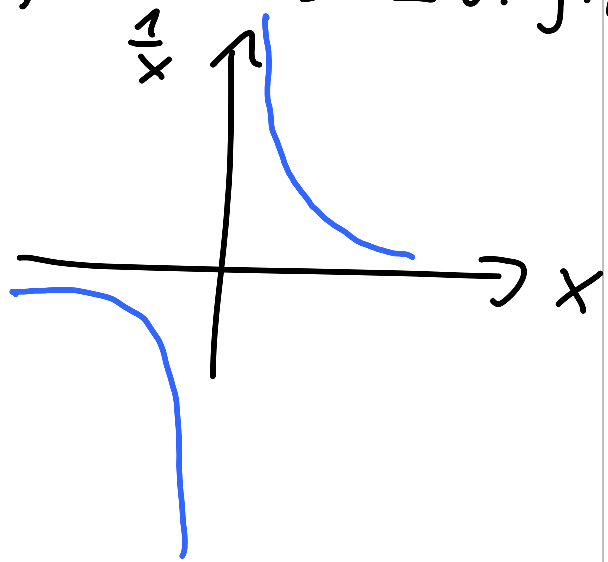
Der Grenzwertbegriff lässt sich auch auf Situationen verallgemeinern, in denen Argumente $x \in \mathbb{D}$ oder/und Funktionswerte $f(x) \in \mathbb{D}$ gegen $\pm\infty$ streben, sodass z.B. gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

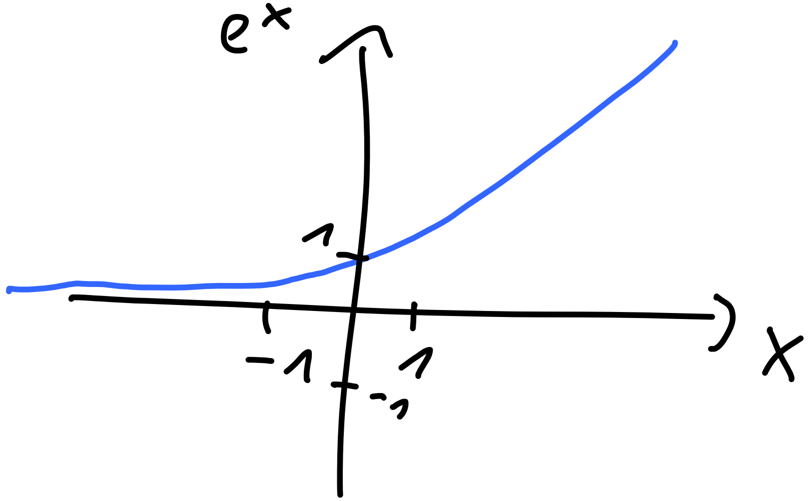
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$



$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \\ &\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{aligned}}$$



$\longrightarrow$ Übungen

② Differentialrechnung

Motivation

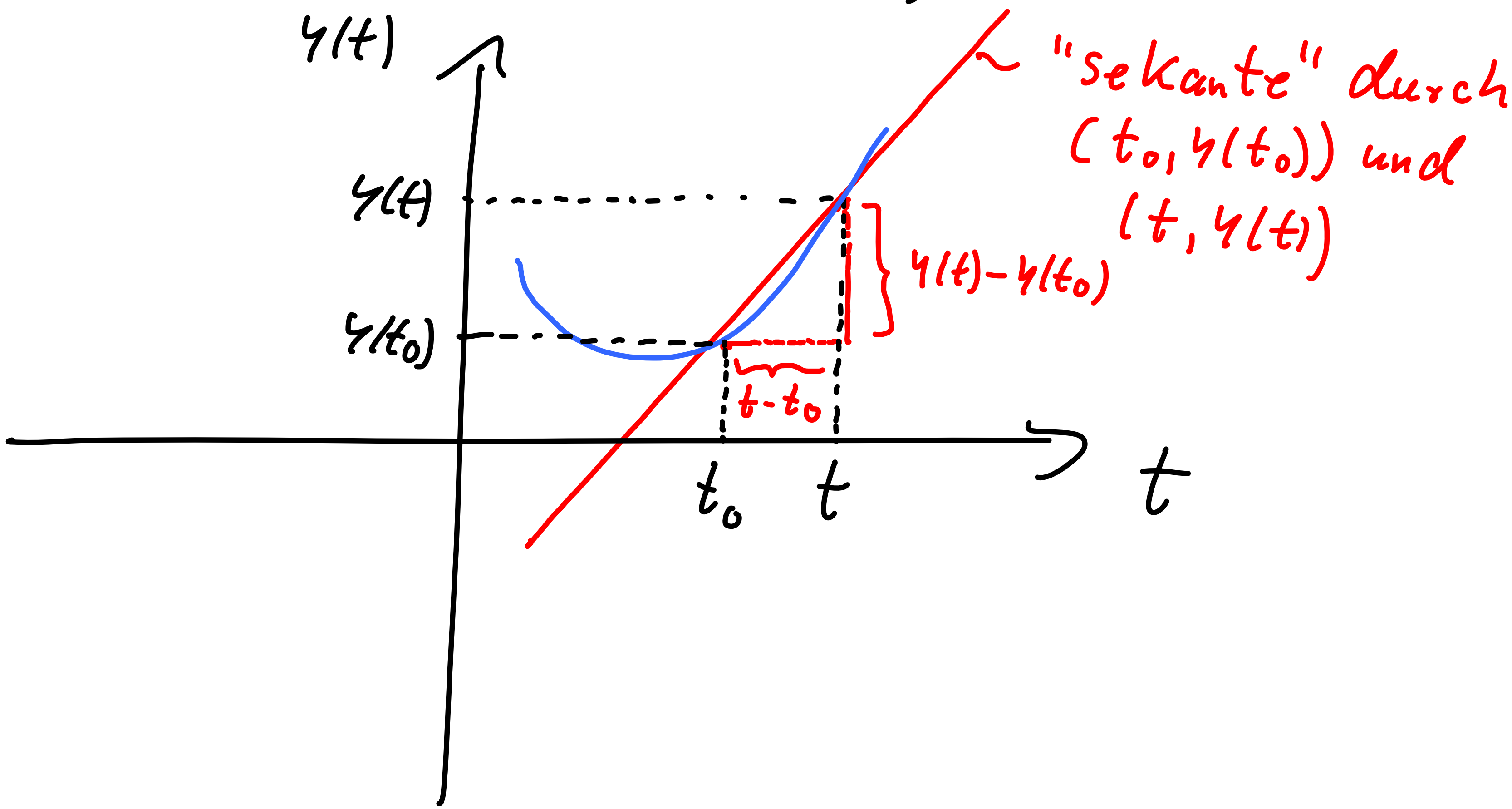
Sei $y(t)$ die Position eines Körpers auf der y-Achse zur Zeit t und t_0 und t $(t_0 \neq t)$ zwei beliebig gewählte Zeitpunkte.

Dann beschreibt die "akkumulierte Änderungsrate"

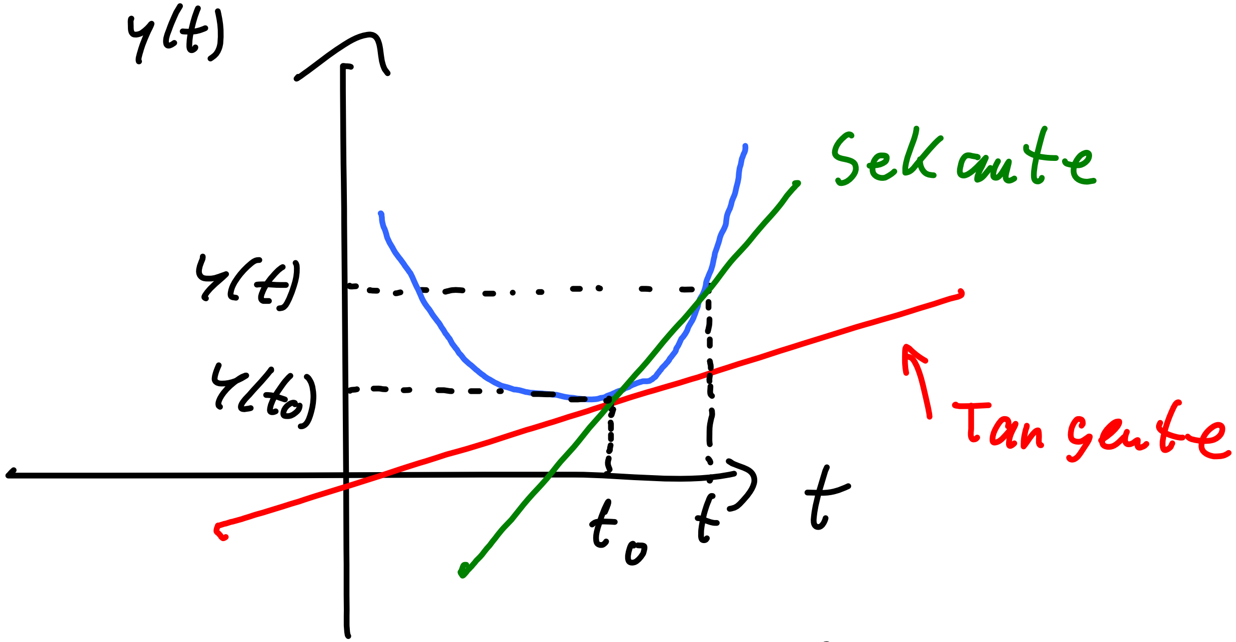
$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} := \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}$$

die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers zwischen t_0 und t.

Diese entspricht graphisch der Steigung der Geraden ("Sekanten") durch die Punkte $(t_0, y(t_0))$ und $(t, y(t))$:



Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit t_0 (also die "infinitesimale Änderungsrate" des Ortes pro Zeiteinheit) entspricht dagegen der Steigung der Tangenten bei $(t_0, y(t_0))$:



Diese ergibt sich aus der Sekantensteigung im Grenzfall $t \to t_0$:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} := \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}$$

Wie in diesem Beispiel interessiert man sich in der Physik häufig für solche infinitesimalen Änderungsraten von Funktionen, also für die Tangentensteigungen der jeweiligen Funktionsgraphen, sofern diese wohldefiniert sind.

Dies motiviert die folgende Definition:

Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existiert.

Falls er existiert, wird er mit

$$\boxed{f'(x_0) \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0)}$$

bezeichnet und die "Ableitung" von f an der stelle x_0 genannt.

Terminologie:

- $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = "Differenzenquotient"
- $\dfrac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = "Differentialquotient"

- Gelegentlich schreibt man auch:

$$\boxed{x = x_0 + h \quad \text{oder} \quad x = x_0 + \Delta x}$$

und damit:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\underline{\underline{h \to 0}}} \frac{f(\overbrace{x_0 + h}^{x}) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}}$$

- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt <u>differenzierbar</u>, wenn sie an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar ist. Die Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} f' &: \mathbb{D} \to \mathbb{R} \\ f' &: x \mapsto f'(x) \end{aligned}}$$

heißt dann die (erste) <u>Ableitung von f.</u>

- Häufig schreibt man: "<u>diff'bar</u>" statt "<u>differenzierbar</u>"

<u>Gegenbeispiele zur Differenzierbarkeit:</u>

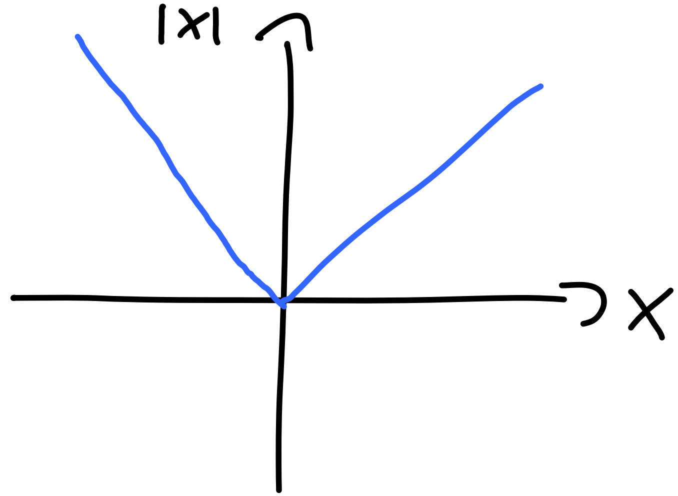
Für die Diff'barkeit von f bei $x_0 \in D$ muss insbesondere gelten:

$$\boxed{-\infty < \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{!}{=} \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \infty}$$

Nur bei Gleichheit existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Gegenbeispiel 1:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$



$\Rightarrow$ Ist bei $x_0 = 0$ nicht diff'bar, denn:

- $$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x}$$

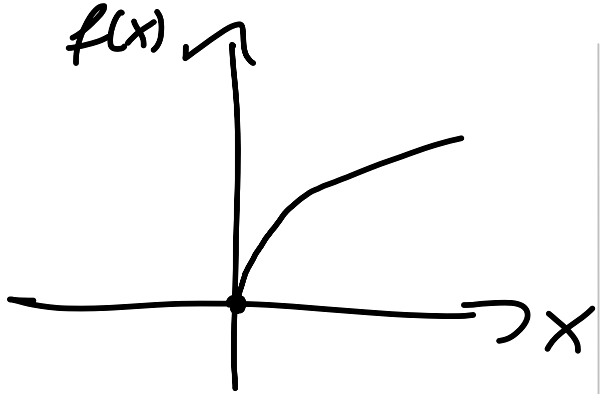
$$= \lim_{x \nearrow 0} \frac{(-x)}{x} = -1$$

wegen $x < 0$ ist $|x| = -x$

$x > 0 \Rightarrow |x| = x$

- $$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = +1$$

(ii) $f: \mathbb{R}_{+,0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$



$\Rightarrow$ Ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn die Tangentensteigung wäre dort unendlich:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \; \lightning$$

Ableitungen der elementaren Funktionen:

Potenzen:

- $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  (sowie $x \neq 0$ bei $\alpha < 1$

  $x > 0$ für $\alpha \notin \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx}(x) = \alpha \, x^{\alpha - 1}}$$

- $f(x) = a x^0 = a = \text{const.}$

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x) = 0}$$

Exponentialfunktion:

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx} = \exp(x) = e^x}$$

e^x ist seine eigene Ableitung!

ae^x erfüllt das auch: $\frac{d}{dx}(ae^x) = ae^x$

a^x hingegen erfüllt dagegen **nicht** $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x$,

denn: $a^x = e^{(\ln a)\cdot x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot e^{(\ln a)\cdot x}$

$$= \ln a \; a^x \neq a^x$$

Kettenregel, siehe später

Trigonometrische Funktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \end{aligned}}$$

Ableitungsregeln

„Linearität" der Ableitung:

- $\frac{d}{dx}\left(a f(x)\right) = a \frac{df}{dx}(x)$ $\qquad a = \text{const}$ $(a \in \mathbb{R})$
- $\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$

Man sagt: Die Ableitung ist eine „Lineare" operation.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + \dots + a_{N-1}x^{N-1} + a_N x^N\right)$$

$$= a_0 \underbrace{\frac{d}{dx}(1)}_{0} + a_1 \underbrace{\frac{d}{dx}(x)}_{1} + \dots + a_{N-1} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^{N-1})}_{(N-1)x^{N-2}}$$

$$+ a_N \frac{d}{dx}(x^N)$$

$$= 0 + a_1 + \ldots + a_{N-1}(N-1)x^{N-2} + a_N N x^{N-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1}$$