Vorlesung 8

20. 3. 2019

Ableitungsregeln

Linearität:

- $\frac{d}{dx}(a f(x)) = a \frac{d}{dx} f(x)$
- $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

Produktregel:

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Beispiel: $h(x) = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)}$

$$\Rightarrow h'(x) = \underbrace{2x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} + \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}$$

Quotientenregel:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Beispiel:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot (\cos x) - (\sin x)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Kettenregel:

$$\boxed{\left(g\circ f\,(x)\right)' = \left(g(f(x))\right)' = \underset{\text{"Äußere Ableitung"}}{g'(f(x))} \cdot \underset{\text{"Innere Ableitung"}}{f'(x)}}$$

Beweis:

$$\frac{d}{dx}(g\circ f)(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g\circ f\,(x) - g\circ f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0}$$

Erweitern

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\right] \cdot \underbrace{\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]}_{f'(x_0)}$$

$f(x) =: y$

$f(x_0) =: y_0$

$$= \underbrace{\left[\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\right]}_{g'(y_0)} \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0)$$

<u>In suggestiver Kurzschreibweise:</u>

$$g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{y = f(x)})}_{z = g(y)}\Big) = \frac{dz}{dx} \underset{\uparrow}{=} \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g'(y) \cdot f'(x)$$

"Erweitern mit dy"

($\Leftrightarrow$ Erweiterung mit $f(x) - f(x_0)$ im Beweis)

Beispiele:

(i) $\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{\sin(\underbrace{3x}_{y=f(x)})}_{z=g(y)}\Big]$ $\Rightarrow$ $y=f(x)=3x \Rightarrow f'(x)=3$

$z=g(y)=\sin(y) \Rightarrow g'(y)=\cos y$

$\Rightarrow g'(f(x))=\cos(f(x))$

$=\cos(3x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\sin(3x)\right] = \underbrace{\cos(3x)}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{3}_{f'(x)} = 3\cos(3x)$$

(ii) $\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{e^{\overbrace{\sin x}^{y=f(x)}}}_{z=g(y)=e^y}\Big]$ $\Rightarrow$ $y=f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$z=g(y)=e^y \Rightarrow g'(y)=e^y$

$\Rightarrow g'(f(x))=e^{\sin x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{\sin x}\right] = \underbrace{e^{\sin x}}_{g'(f(x))} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^3$

Version 1:

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^4-1}_{y=f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1}\Big]^3 = \underbrace{3y^2}_{g'(y)}\cdot f'(x) = 3\left[\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^4-1\right]^2 \cdot f'(x)$$

$$z = g(y) = y^3 \Rightarrow g'(y) = 3y^2$$

Nun ist:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\Big[\big(\underbrace{x+\tfrac{1}{x}}_{\tilde{y}=\tilde{f}(x)=x+\frac{1}{x}}\big)^4-1\Big] = \tilde{g}'(\tilde{y})\cdot\tilde{f}'(x) = 4\tilde{y}^3\cdot\left(1-\tfrac{1}{x^2}\right)$$

$$\tilde{y}=\tilde{f}(x) = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \tilde{f}'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$$

$$= 4\left(x+\tfrac{1}{x}\right)^3\left(1-\tfrac{1}{x^2}\right)$$

$$\tilde{z} = \tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{y}^4-1 \Rightarrow \tilde{g}'(\tilde{y}) = 4\tilde{y}^3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^3 = 3\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-1\right]^2 \cdot 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

Version 2:

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left[\underbrace{\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{y=f(x)}{}^4-1}_{z=g(y)}\right]^3}_{w=h(z)}$$

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$z = g(y) = y^4 - 1 \Rightarrow z'(y) = 4y3$$

$$w = h(z) = z^3 \Rightarrow w'(z) = 3z^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\, w(z(y(x))) = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= w'(z)\cdot z'(y)\cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\, w(z(y(x))) = \underbrace{3z^2}_{w'(z)} \cdot \underbrace{4y^3}_{z'(y)} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}_{y'(x)} =$$

$$z = y^4 - 1 \quad \overset{\curvearrowright}{=} 3\left(y^4-1\right)^2 \cdot 4y^3 \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y = x + \frac{1}{x} \quad \overset{\curvearrowright}{=} 3\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 - 1\right)^2 \cdot 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

Die Ableitung einer Umkehrfunktion

Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

Dann gilt ja:

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

Die Ableitung beider Seiten dieser Gleichung ergibt mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(f \circ f^{-1}(x)\right) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(f(f^{-1}(x))\right) = 1$$

Kettenregel

$$\Leftrightarrow \underbrace{f'\left(f^{-1}(x)\right)}_{\text{Äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(f^{-1}(x)\right)'}_{\text{Innere Ableitung}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Beispiele:

(i) $f = \exp \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \exp(x) = f(x) \\ f^{-1}(x) = \ln(x) = \exp^{-1}(x) \end{cases}$

Umkehr-Funktion.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\ln(x)}_{f^{-1}(x)}\Big) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\underbrace{\exp(\ln(x))}_{x,\ \text{denn } \ln = \exp^{-1}}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

(ii) $f(x) = \sin x \implies \begin{cases} f'(x) = \cos x \\ f^{-1}(x) = \arcsin x \end{cases}$

$$\implies \frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Idee zur weiteren Vereinfachung:

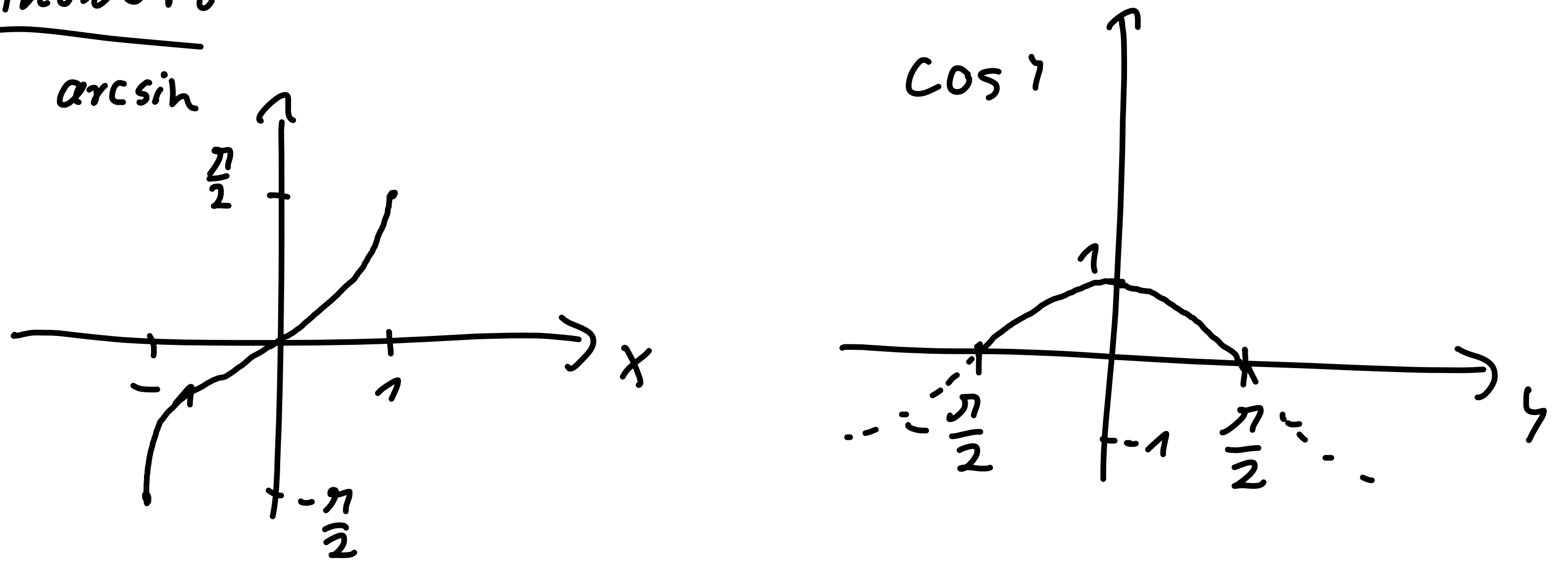
Drücke cos durch sin aus (mit Hilfe von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), um $\sin(\arcsin(x)) = x$ ausnutzen zu können.

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \iff \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

$$\iff \cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

Frage: Welches Vorzeichen gilt hier?

Antwort:



also: $\arcsin[-1,1] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [0,1]$

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) \in [0,1] \Rightarrow$ größer oder gleich Null

$\Rightarrow$ Das Pluszeichen ist hier richtig!

$\Rightarrow \cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}\quad , \quad y = \arcsin x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{\cos\left[\arcsin(x)\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \qquad (y = \arcsin(x))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left[\underbrace{\sin(\arcsin(x))}_{x}\right]^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Höhere Ableitungen

Falls die Ableitungsfunktion $f'(x)$ selbst auch wieder diff'bar ist, kann man die sog. 2. Ableitung $f''(x)$ von $f(x)$ bilden:

$$\boxed{f''(x) := (f'(x))'}$$

<u>Analog</u>: <u>3. und höhere Ableitungen</u>:

$$\boxed{f'''(x) := (f''(x))' = (f'(x))''}$$

<u>Bemerkungen</u>: (i) Manchmal nennt man $f(x)$ auch die "nullte Ableitung" (0. Ableitung) von $f(x)$

(ii) Manchmal schreibt man $f^{(n)}(x)$ = n-te Ableitung von $f(x)$.

z.B. $f^{(1)}(x) = f'(x)$

$$f^{(3)} = f'''(x)$$

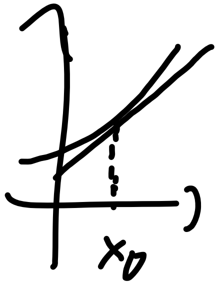
$$f^{(0)} = f(x)$$

$$\vdots$$

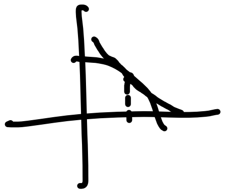
Einige Anwendungen der Differentialrechnung

(I) Kurvendiskussion

(i) Monotonie



$f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 streng monoton wachsend

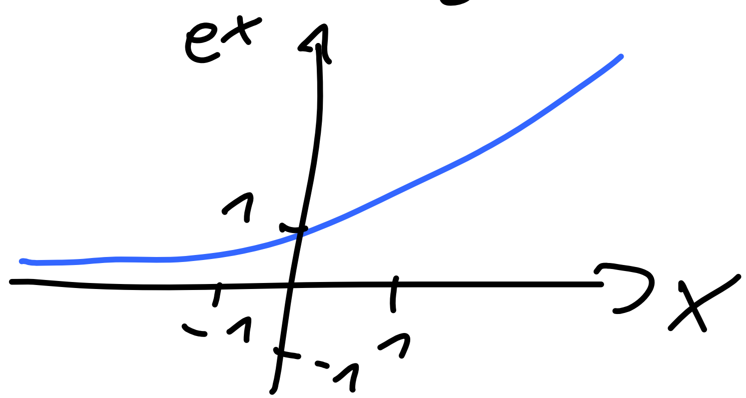


$f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 streng monoton fallend

Beispiel:

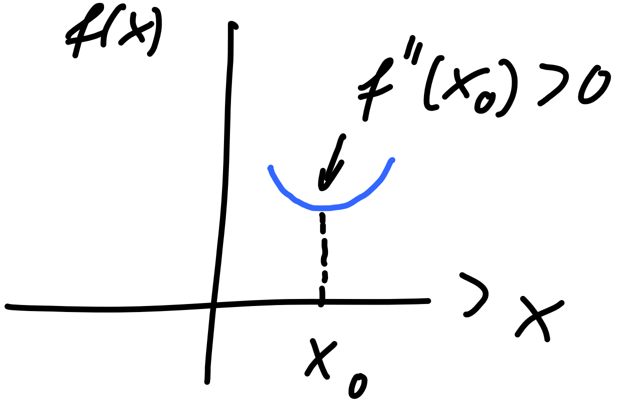
$$(e^x)' = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ e^x ist überall streng monoton wachsend

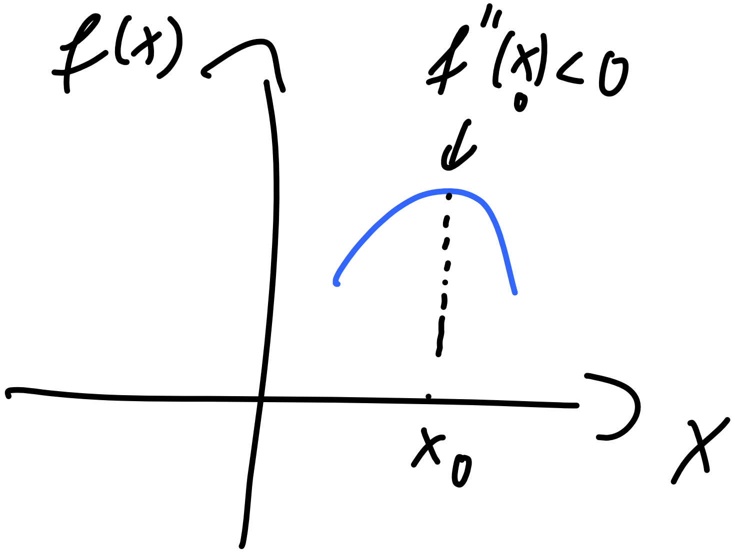


(ii) Krümmung

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 "**konvex**" (d.h. Γ_f ist linksgekrümmt)

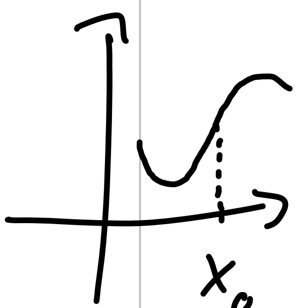


- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist in einer Umgebung von x_0 konkav (d.h. Γ_f ist rechtsgekrümmt)



- Punkte, an denen die Krümmung die Richtung wechselt, heißen "Wendepunkte"

Hinreichendes Kriterium:



$$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist ein Wendepunkt}}$$

Beispiel: $x_0 = 0$ bei $f(x) = \sin x$