Vorlesung 9 — 21.3.2019

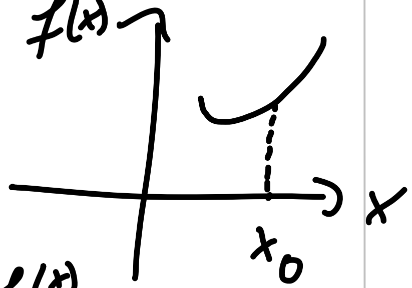
Letztes Mal:

(I) Kurvendiskussion

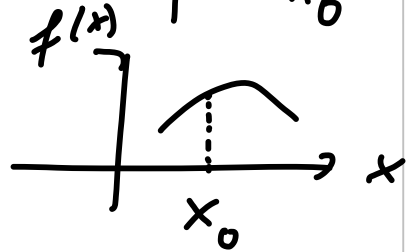
(i) Monotonie

(ii) Krümmung

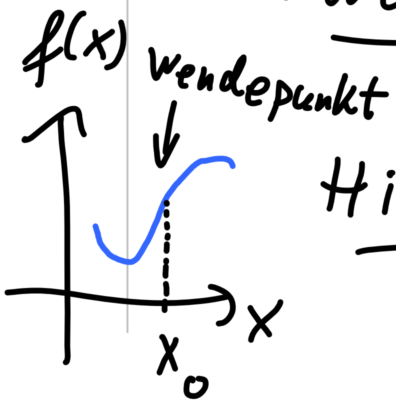
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ist "konvex" nahe x_0:



- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist "konkav" nahe x_0:



- Wendepunkte: Punkte, an denen die Krümmung die Richtung wechselt.



Hinreichende Bedingung:

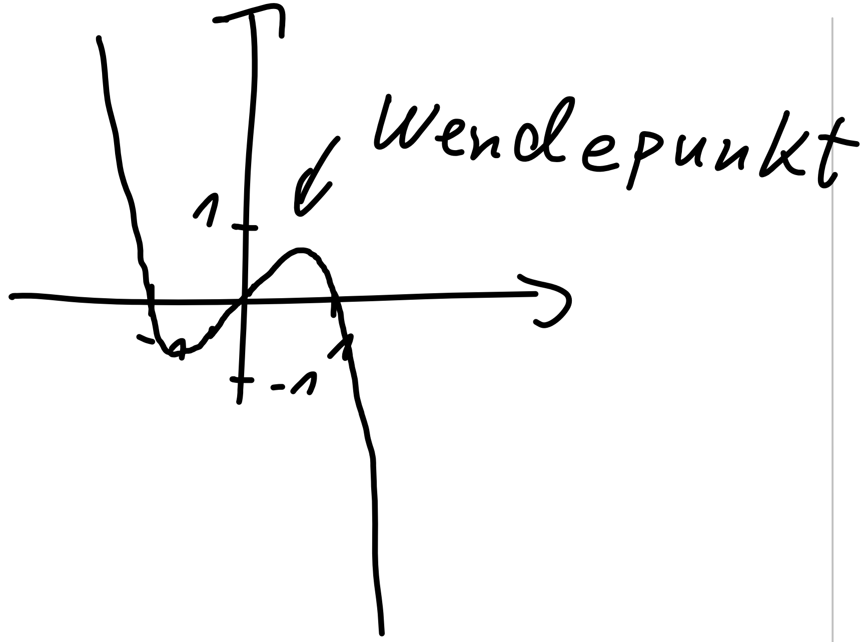
$$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist Wendepunkt}}$$

$$f(x) = x - x^5$$

$$f'(x) = 1 - 5x^4$$

$$f''(x) = -5 \cdot 4x^3$$

$$f'''(x) = -5 \cdot 4 \cdot 3x^2$$



$$\Rightarrow f'''(x_0 = 0) = 0$$

$$f''(x_0 = 0) = 0 \quad \Rightarrow \text{Bedingung ist nur } \underline{\text{hinreichend}}, \text{ aber } \underline{\text{nicht notwendig}}.$$

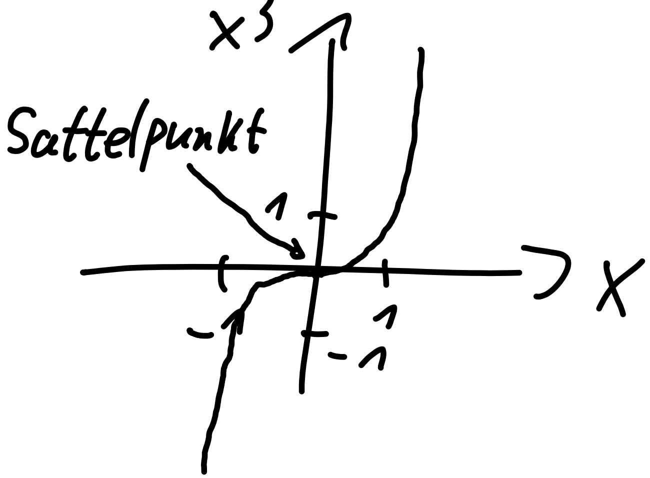
- Wendepunkte mit Steigung Null heißen auch "Sattelpunkte"

Hinreichende Bedingung:

$$\boxed{f''(x_0)=0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \text{ und } f'(x_0)=0 \quad \Rightarrow x_0 \text{ ist Sattelpunkt}}$$

Beispiel:

$f(x) = x^3$ hat bei $x_0 = 0$ einen Sattelpunkt



Gegenbeispiele:

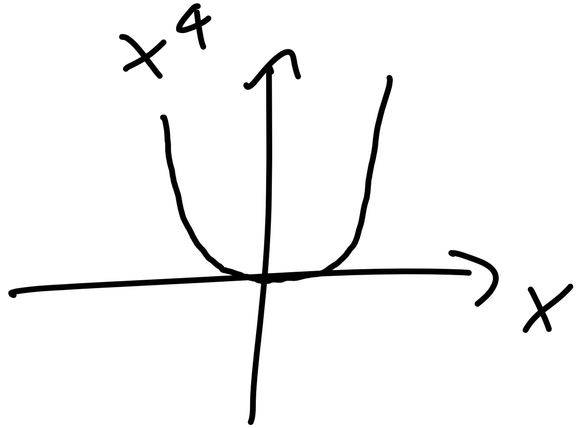
(i) Falls $f'''(x_0) \neq 0$ verletzt ist (also falls $f'''(x_0) \overset{!}{=} 0$), muss das tatsächlich kein Sattelpunkt mehr sein:

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 4 \cdot 3\, x^2$$
$$f'''(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$$

$\Rightarrow f''(x_0) = 0$ ✓

$f'(x_0) = 0$ ✓

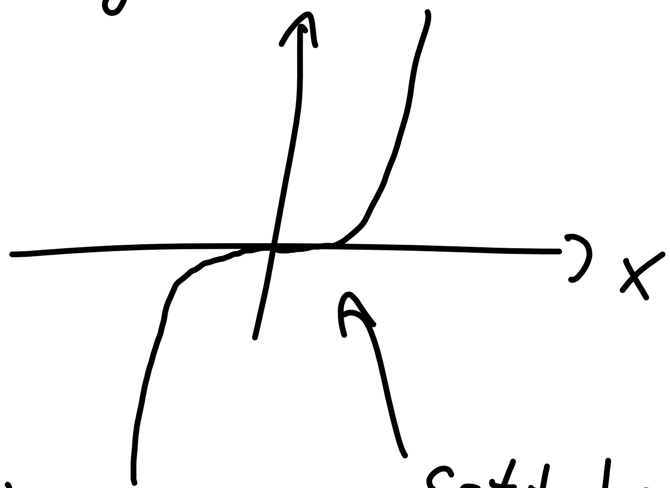
$f'''(x_0) = 0$ ↯



$\Rightarrow x_0 = 0$ ist kein Sattelpunkt.

(ii) Obige Bedingung ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig: x^5

$$f(x) = x^5$$



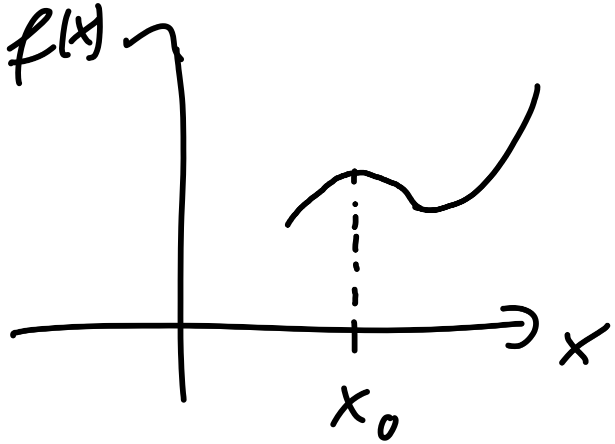
Sattelpunkt bei $x_0 = 0$

$$f'(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(0) = 0$$

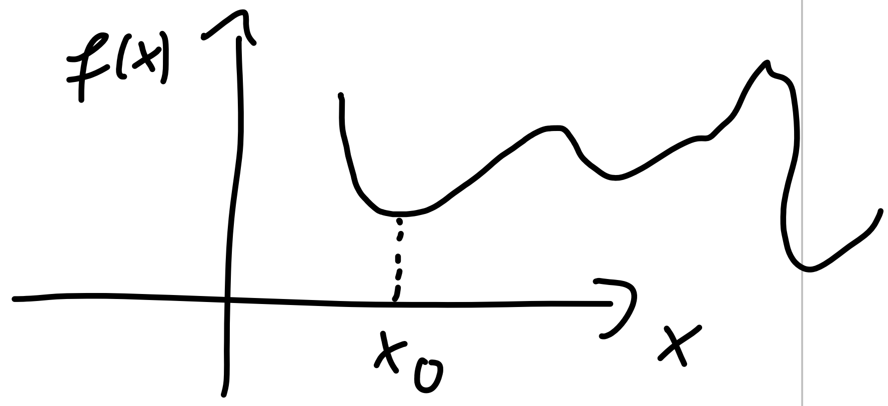
$$f''(x) = 5 \cdot 4 \cdot x^3 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 x^2 \Rightarrow f'''(0) = 0$$

(iii) Lokale Maxima und Minima



(lokales Maximum bei x_0)



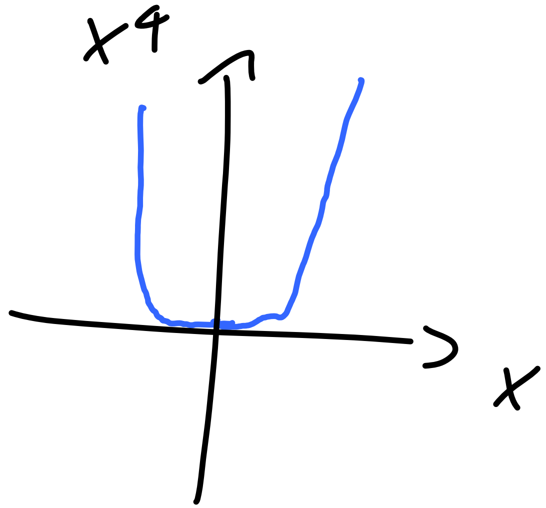
(lokales Minimum bei x_0)

Hinreichendes Kriterium:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum

Dies ist keine notwendige Bedingung, denn z.B.



$$f(x) = x^4$$

$f'(0)=0 \quad \Longleftarrow \quad f'(x) = 4x^3$

$$f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2$$

$f''(0)=0$

Voraussetzungen des obigen Kriteriums sind nicht alle erfüllt, aber trotzdem ist bei $x_0=0$ ein Minimum.

(II) Taylor-Entwicklung

Viele gängige Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ lassen sich in der Nähe eines Punktes x_0 ("Entwicklungspunkt") durch eine sog. Potenzreihe darstellen, bzw. approximieren

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \end{aligned}}$$

Terminologie:

(i) Funktionen, die sich wie oben durch eine Potenzreihe darstellen lassen, nennt man analytisch.

(ii) Eine "Reihe" bezeichnet allgemein eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} (\ldots)$,

$\rightarrow$ "Potenzreihe"

Bedeutung für Physik

Existiert eine Darstellung durch eine Potenzreihe, so ergeben die ersten Glieder i. A. bereits eine sehr gute Näherung der eigentlichen Funktion $f(x)$, wenn man sehr nahe bei x_0 bleibt (also für $|x-x_0| \ll 1$)

Grund: Höhere Potenzen $(x-x_0)^n$ ergeben für $|x-x_0| \ll 1$ nur vernachlässigbar kleine Beiträge

Illustration:

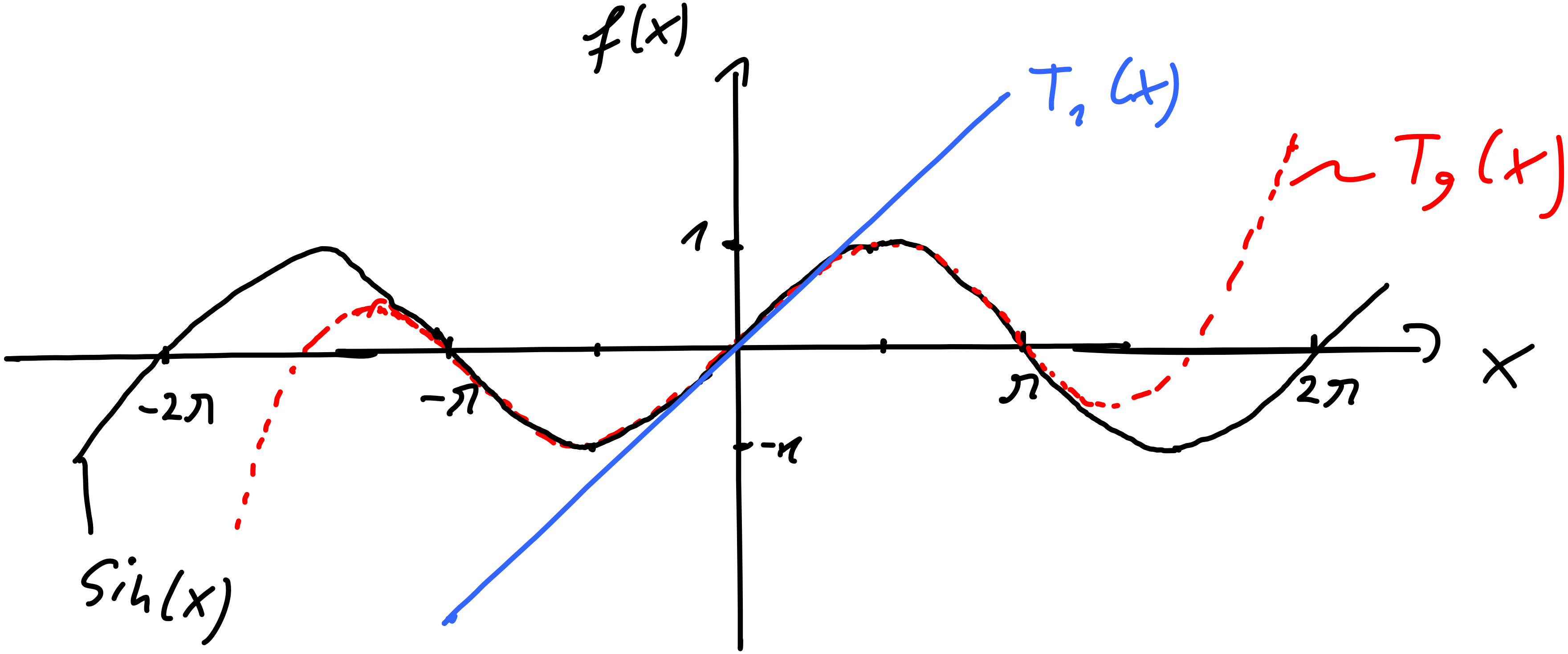
Die Potenzreihe von $\sin x$ um $x_0 = 0$ ist

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

($n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ ("n Fakultät"))

Seien

$$\boxed{\begin{aligned} T_1(x) &:= x \\ T_9(x) &:= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \end{aligned}}$$



$\Rightarrow$ $T_1(x)$ ist eine recht gute Näherung für $|x| \lesssim \frac{\pi}{6}$

$T_9(x)$ ist eine recht gute Näherung sogar bis etwa $|x| \approx \frac{5}{4}\pi$

Bemerkungen:

(i) Es gibt Potenzreihen, die nur für eine begrenzten x-Bereich gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren

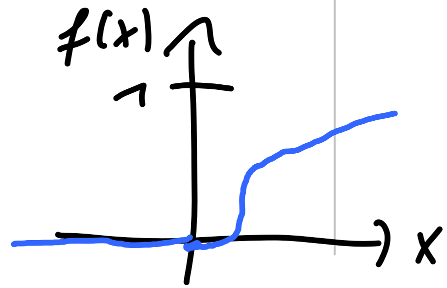
z.B.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \left(\text{gilt nur für } |x|<1\right)$$

→ "Die Potenzreihe hat hier den Konvergenzradius 1"

(ii) Es gibt auch nicht-analytische Funktionen:

z.B. $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$



→ ist bei $x_0=0$ nicht analytisch.

<u>Frage</u>:

Angenommen

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \\ &\quad + a_4(x-x_0)^4 + a_5(x-x_0)^5 + \dots \end{aligned}}$$

ist analytisch. Wie bestimmt man die Koeffizienten a_n?

<u>Antwort</u>:

Leite beide Seiten n-mal nach x ab und setze dann $x = x_0$ ein:

$$\frac{d}{dx}\overbrace{(\underbrace{x-x_0}_{y=f(x)})^n}^{g(y)=y^n} = n\,(x-x_0)^{n-1}\cdot 1$$

0. Ableitung : $f(x_0) = a_0$

1. Ableitung : $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + 5a_5(x-x_0)^4 + \dots$

$$\Rightarrow f'(x_0) = a_1$$

2. Ableitung: $f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + 4\cdot 3a_4(x-x_0)^2 + 5\cdot 4a_5(x-x_0)^3 + \dots$

$$\Rightarrow f''(x_0) = 2a_2$$

3. Ableitung: $f'''(x) = 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0) + 5\cdot 4\cdot 3\cdot a_5(x-x_0)^2 + \dots$

$$\Rightarrow f'''(x_0) = 3\cdot 2a_3$$

4. Ableitung: $f''''(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 a_5 (x-x_0) + \dots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f''''(x_0) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4}}$$

Also:

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{1} = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \qquad (0! := 1)$$

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1} = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \qquad (1! = 1)$$

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2} = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \qquad (2! = 2\cdot 1)$$

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{a_n} (x-x_0)^n}$$

heißt die <u>Taylor-Reihe</u> oder <u>Taylor-Entwicklung</u> von f um die Stelle x_0

(Analytische Funktionen sind bereits durch die Ableitungen an einem einzigen Punkt x_0 bestimmt)

Beispiele:

- $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$

$\underline{\underline{x_0 = 0}} \qquad \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} \underbrace{f^{(n)}(0)}_{1} = \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$

("Die Exponentialreihe")

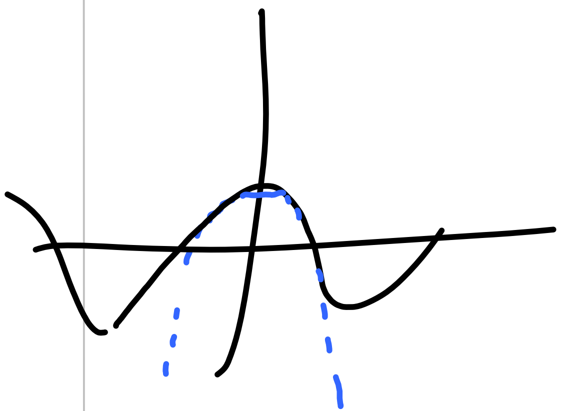
- $f(x) = \sin x \,,\; x_0 = 0$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}$$

$\left(\Rightarrow \text{"Kleinwinkelnäherung"} \quad \sin x \approx x \quad \text{Für } |x| \ll 1 \right)$

- $f(x) = \cos x \, , \quad x_0 = 0$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \end{aligned}}$$



$\left(\Rightarrow \text{"Kleinwinkelnäherung"} : \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad (|x| \ll 1) \right)$

- $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \neq 0), \quad |x| < 1$

$$x_0 = 0$$

$$f(x_0) = f(0) = (1+0)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \underbrace{1 + \alpha x}_{\substack{\text{Sehr häufig} \\ \text{benutzt für kleine } |x|}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$$

z.B. $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \simeq 1-x$

$(\alpha = -1)$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} \simeq 1+\alpha(-x) = 1-\frac{1}{2}(-x)$

$\left(\alpha = -\frac{1}{2}\right)$ $= 1+\frac{1}{2}x$

3 Integralrechnung

3.1 Stammfunktionen

- Ableitung ist die Antwort auf die Frage:

$\boxed{\text{Funktion ist bekannt}} \rightarrow \boxed{\text{Was ist die Änderungsrate der Funktion an jedem Punkt?}}$

Beispiel: Posittition $x(t)$ sei bekannt

→ Was ist momentane Geschwindigkeit?

$$\rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt}(t).$$

- Die Stammfunktion beantwortet die umgekehrte Frage:

$\boxed{\text{Die Änderungsrate einer Funktion ist an jedem Punkt bekannt.}} \longrightarrow \boxed{\text{Was ist die Funktion?}}$

<u>Beispiel:</u>

Momentane Geschwindigkeit $v(t)$ $\forall t$ bekannt

$\rightarrow$ Was ist meine Position $x(t)$?

$\rightarrow$ $x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$.