Vorlesung 10 22.3.2019

https://unith.desy.de/teaching/lectures/vorkurs2019

Letztes Mal: 3 Integralrechnung

3.1 Stammfunktionen

(1) Funktion
(z.B. $x(t)$)

(1) ist Stammfunktion von (2)

(2) ist Ableitung von (1)

(2) Änderungsrate der Funktion an jedem Punkt
z.B. $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

Etwas genauer definieren wir:

Eine Funktion $F: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\boxed{\frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad (\forall x \in \mathbb{D})$$

($f(x)$ ist Änderungsrate von $F(x)$)

Für $F(x)$ schreibt man auch:

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\, dx}$$

und bezeichnet $F(x)$ als das **(unbestimmte) Integral** von $f(x)$

Bemerkungen:

(i) Stammfunktionen sind nicht eindeutig, sondern können sich durch "Integrationskonstanten" unterscheiden, denn

$F_1(x)$

und $F_2(x) := F_1(x) + c \quad , \quad c = \text{const.}, \ c \in \mathbb{R}$

haben dieselbe Ableitung:

$$\frac{dF_1(x)}{dx} =: f(x)$$

$$\frac{dF_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(F_1(x) + c\right) = \frac{dF_1(x)}{dx} + \cancelto{0}{\frac{dc}{dx}} = f(x)$$

(ii) Viele Stammfunktionen erhält man, indem man die Listen bekannter Ableitungsfunktionen "rückwärts liest":

z.B.

- $$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\Longrightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

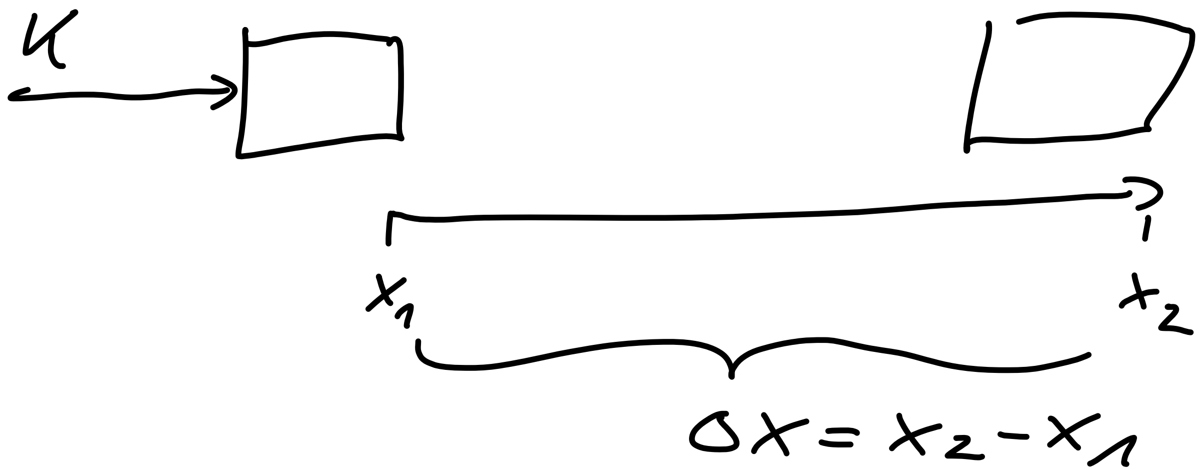
- $$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$

$$\Longrightarrow \int e^{x} dx = e^{x} + c$$

3.2 Flächeninhalte und bestimmte Integrale

Motivation:

Verschiebt eine konstante Kraft K in x-Richtung einen Körper um die Wegstrecke $\Delta x = (x_2 - x_1)$



So wird die Arbeit

$$\boxed{W = K \cdot \Delta x = K(x_2 - x_1)}$$

verrichtet.

Fasst man die auf einen Körper wirkende Kraft am Ort x als Funktion

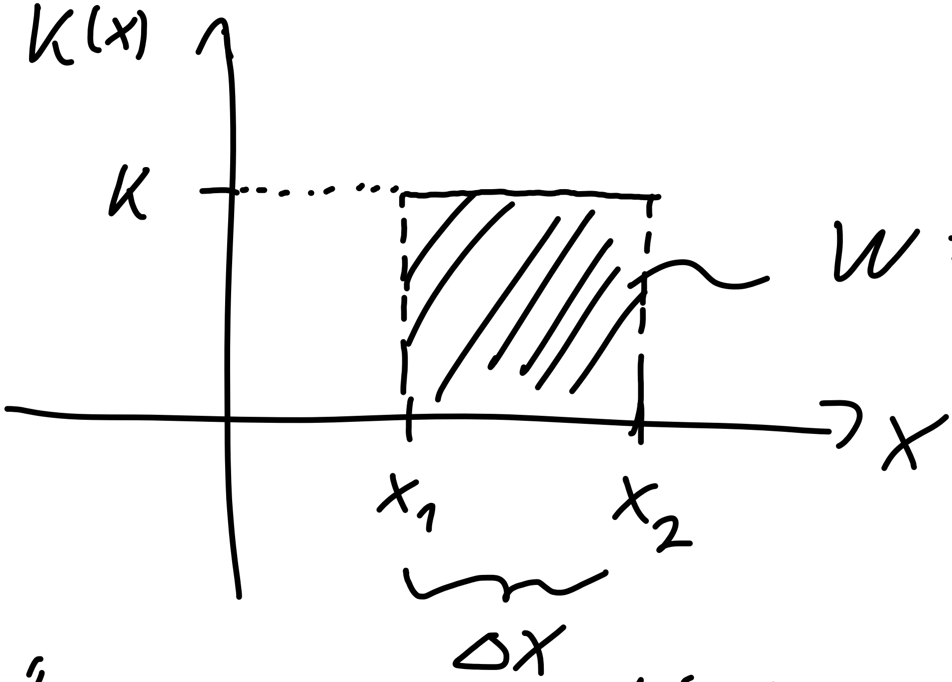
$$\boxed{x \mapsto K(x)}$$

auf, so entspricht die obige Situation mit <u>konstanter Kraft</u> der <u>konstanten Funktion</u>

$$\boxed{x \mapsto K(x) = K = \text{const.}}$$

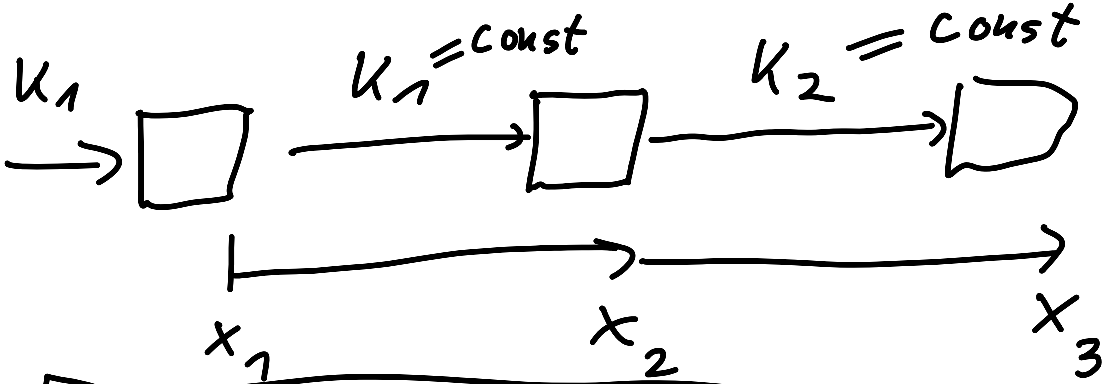
und

$$\boxed{\begin{array}{l} W = \text{Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph } \Gamma_K \\ \quad \text{und der } x\text{-Achse (zwischen den Stellen } x_1, x_2) \end{array}}$$

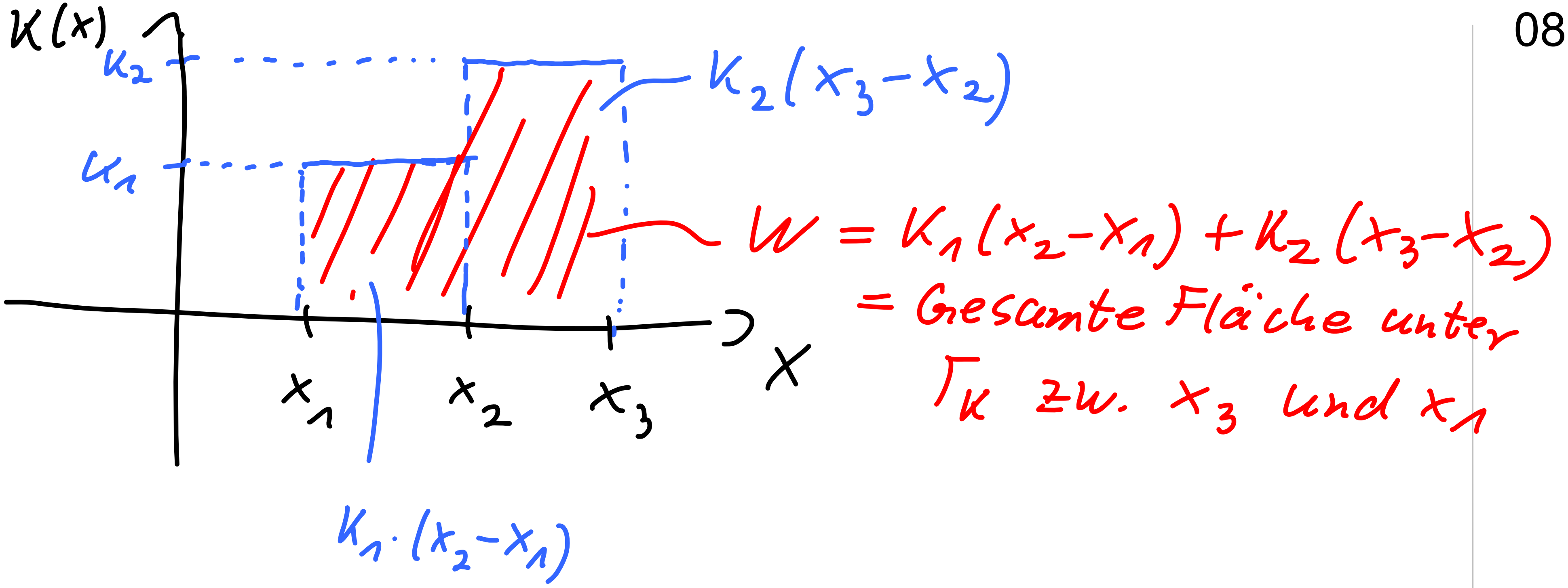


$$W = K \cdot \Delta x$$

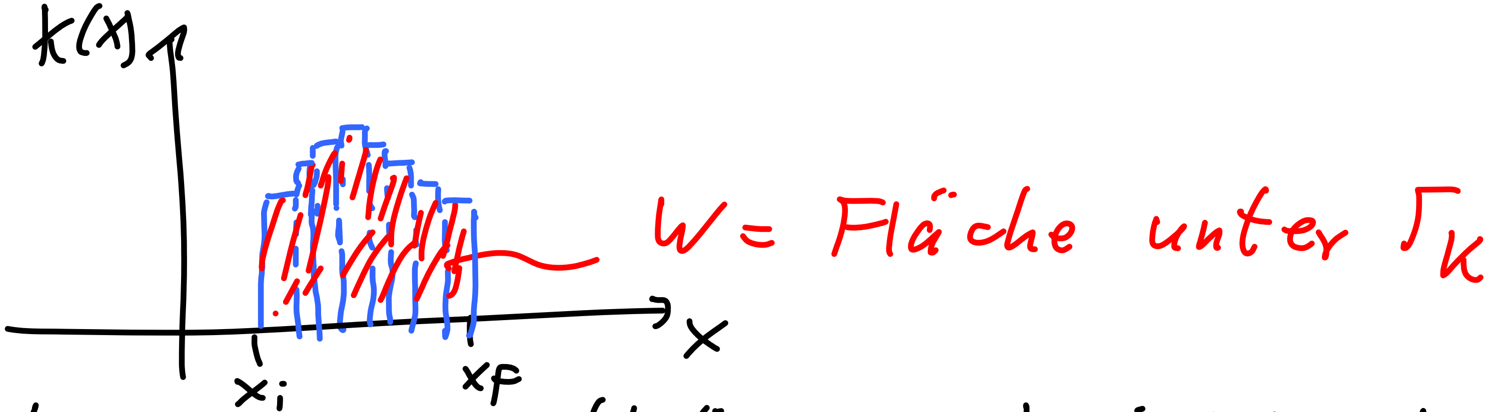
Ähnlich für stückweise Konstante Kräfte:



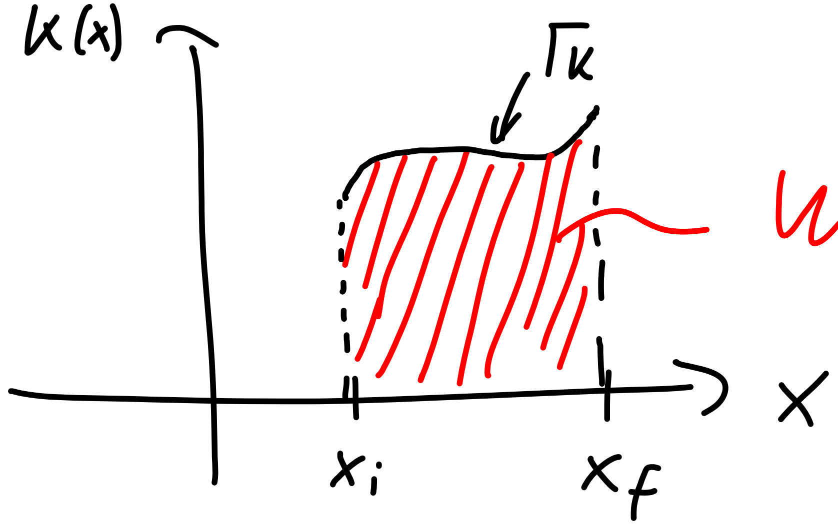
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} W &= K_1(x_2 - x_1) + K_2(x_3 - x_2) \\ &= \text{Fläche unterhalb von } \Gamma_K \text{ zw. } x_3 \text{ und } x_1 \end{aligned}}$$



Analog:



Für beliebig von x abhängige Kräfte $K(x)$ versteht man unter der verrichteten Arbeit W daher ebenfalls die Fläche unter Γ_K zwischen x_i und x_f:



$W =$ Fläche zwischen Γ_K und der x-Achse zwischen x_i und x_f.

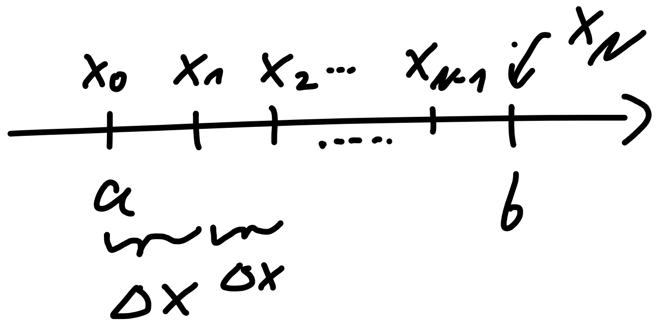
Solche Flächen zwischen Funktionsgraphen und x-Achse treten in Physik und Mathematik häufig auf. Ihre Berechnung ist Gegenstand der "<u>Integralrechnung</u>".

<u>Berechnungsidee</u>:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Zerlege $[a,b]$ in N gleich große Teilintervalle der Größe

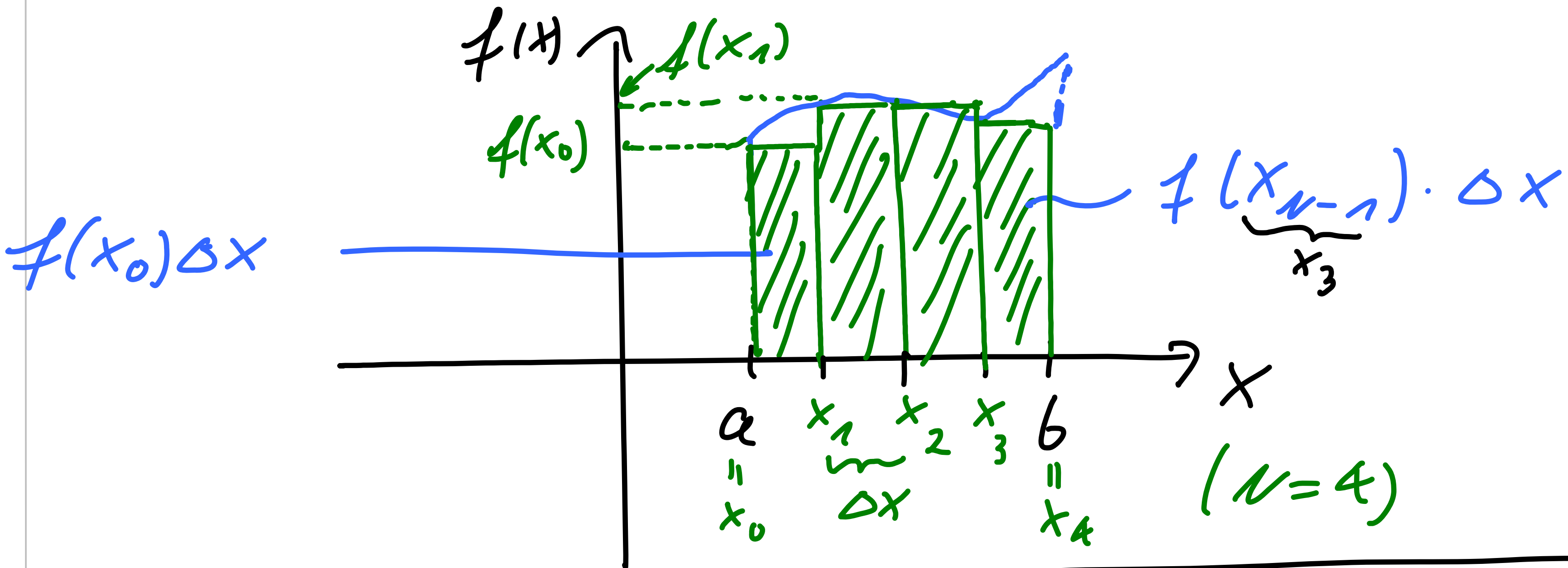
$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{N}}$$



$$x_n = a + n\Delta x \quad (\text{"Stützstellen"})$$

$$\left\{\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= a + \Delta x \\
x_2 &= a + 2\Delta x \\
&\vdots \\
x_{N-1} &= a + (N-1)\Delta x \\
x_N &= a + N\Delta x = \cancel{a} + \cancel{N}\left(\frac{b-\cancel{a}}{\cancel{N}}\right) = b
\end{aligned}\right\}$$

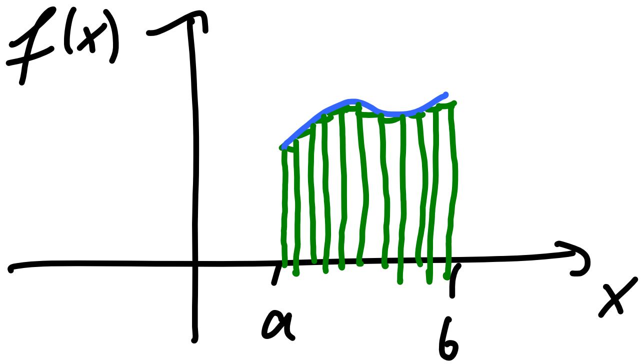
(ii) Nähere den gesuchten Flächeninhalt durch schmale Rechtecke der Höhe $f(x_n)$ $(n = 0, \dots, N-1)$ und Breite Δx an:



$$\Rightarrow \boxed{\text{Gesuchte Fläche unter } \Gamma_f \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x}$$

(iii) Immer bessere Annäherung an die tatsächlich gesuchte Fläche mit dem Grenzwert:

$$\boxed{\text{Gesuchte Fläche unter } \Gamma_f = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\,\Delta x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \underbrace{\frac{(b-a)}{N}}_{\Delta x}}$$



Existiert der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x}$$

so heißt $f(x)$ auf $[a,b]$ <u>integrierbar</u> und den Grenzwert nennt man das <u>bestimmte Integral</u> von $f(x)$ auf $[a,b]$.

<u>Man schreibt:</u>

$$\boxed{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \, dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x}$$

b ← Obere Integrationsgrenze

Integralzeichen (Stilisiertes S für S(umme))

a ← Untere Integrationsgrenze

Integrand

dx: "Infinitesimale Änderung der Integrationsvariablen" in Anlehnung an $\Delta x \to 0$

<u>Frage</u>: Warum ein ähnliches Symbol wie für Stammfunktionen
$$\left(F(x) = \int f(x)\,dx\right)$$

<u>Antwort</u>:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\boxed{\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\left(\text{Fläche zw. } a \text{ und } b \text{ unterhalb von } \Gamma_f\right)} = F(b) - F(a) =: \left[F(x)\right]_a^b =: F(x)\Big|_a^b}$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Bemerkungen:

(i) In der Differenz $F(b) - F(a)$ hebt sich die unbestimmte Integrationskonstante der Stammfunktion weg.

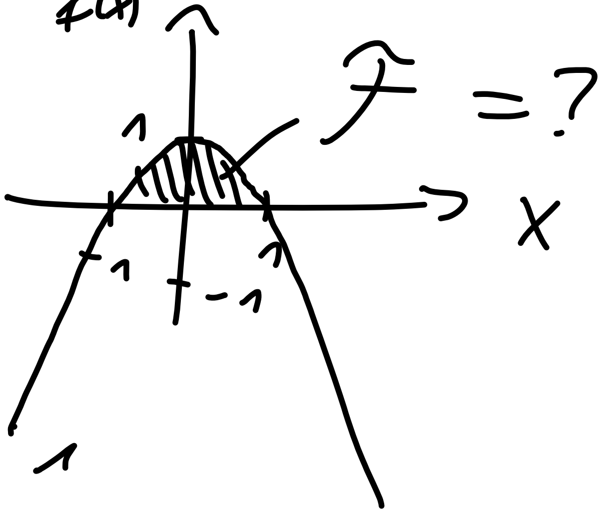
(ii)
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left(\int_a^y f(x)\,dx\right) &= \frac{d}{dy}\left[F(y) - F(a)\right] \\ &= \frac{dF(y)}{dy} - \cancel{\frac{dF(a)}{dy}}^{\,0} \\ &= f(y)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)}$$

Integration ist "invers" zur Differentiation.

Beispiel:

$$f(x) = 1 - x^2$$



$$\Rightarrow \mathcal{F} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^3)\,dx = F(1) - F(-1)$$

$\Rightarrow$ wir brauchen $F(x)$

$$\Rightarrow F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 \quad (+\,c)$$

$$\left(\text{denn } \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) = 1 - \frac{3}{3}x^2 = 1 - x^2 = f(x) \;\checkmark\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \left(1 - \frac{1}{3}1^3\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)^3\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

3.3 Rechenregeln für Integrale

(i) Linearität:

$$\boxed{\int_a^b \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\right) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int_0^\pi \left(2\cos(x) + 3\sin(x)\right) dx$$

$\cos\pi = -1$

$\cos 0 = +1$

$$= 2 \cdot \int_0^\pi \cos(x)\,dx + 3 \cdot \int_0^\pi \sin(x)\,dx$$

$$= 2\left[\sin(x)\right]_0^\pi + 3 \cdot \left[-\cos(x)\right]_0^\pi = 2(0-0) - 3\,\underbrace{(-1-1)}_{-2}$$

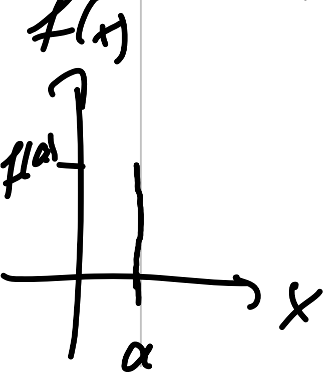
$$= \underline{\underline{6}}$$

(ii) Vertauschung der Integralgrenzen

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

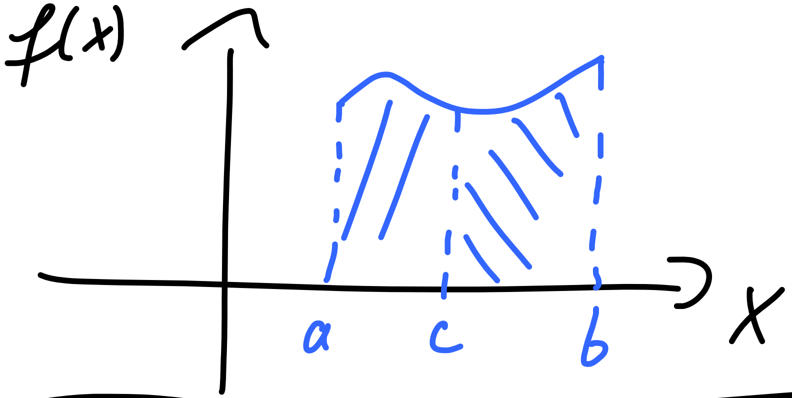
$$\left(\text{denn } \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(x)\,dx\right)$$

(iii) Gleiche Integralgrenzen:



$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \left(= F(a) - F(a)\right)}$$

(iv) Aufteilung des Integrationsintervalls



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)}$$

$$= F(b) - F(a)$$