Vorlesung 11

25. 3. 2019

3.4 Integrationstechniken

(i) Partielle Integration

= Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

- Die linke Seite hat die Stammfunktion $u(x)\cdot v(x)$.
- Die Stammfunktion der rechten Seite ist:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Also:

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

(Partielle Integration)

Analog für bestimmte Integrale:

$$\boxed{\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

Anwendungsbeispiele:

(i) Gesucht: $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v'}\, dx$

→ Wähle: $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v'}\, dx = x e^x - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v}\, dx$$

$$= x e^x - \underbrace{\int e^x\, dx}_{e^x\,(+c)} = x e^x - e^x \,(+c)$$

Probe: $\frac{d}{dx}\left(x e^x - e^x + c\right) = \cancel{1 \cdot e^x} + x e^x - \cancel{e^x}$

$= x e^x$ ✓

(ii) <u>Gesucht:</u> $\int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx$

$\rightarrow$ <u>Wähle:</u> $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin(x)$

$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \cdot \sin x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \underbrace{\int 1 \, dx}_{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\cos x \cdot \sin x) + \frac{1}{2} x \quad (+c)$$

(iii) Gesucht: $\int \ln x \, dx$

Trick: $\int \ln x \, dx = \int \underbrace{(\ln x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx$

$\longrightarrow$ Wähle: $u(x) = \ln x \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \Longrightarrow v(x) = x$

$$\Longrightarrow \int \underbrace{(\ln x)}_{u} \underbrace{1}_{v'} \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x \quad (+c)$$

(ii) Substitutionsregel

Die Substitutionsregel basiert auf einer Umkehrung der Kettenregel der Differentialrechnung und erlaubt die Vereinfachung von Integralen der Form

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

Für Funktionen f, g gemäß der Regel:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy}$$

Im Endergebnis y durch $g(x)$ ersetzen.

(Für unbestimmte Integrale: $\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy + c}$

Beweis:

Sei F die Stammfunktion von f:

$$\boxed{F'(y) = f(y)}$$

Dann ist:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \stackrel{\downarrow}{=} \int_a^b \underbrace{F'(g(x)) \cdot g'(x)}_{(F(g(x)))' \text{ (Kettenregel)}}\, dx$$

$$= \int_a^b (F(g(x)))'\, dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$\int h'(x)\, dx = h(x)$$

$F' = f$

$$= \left[F(y)\right]_{g(a)}^{g(b)} \stackrel{\downarrow}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$$

Beispiele:

(i) $$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_a^b f(\underbrace{x+c})\cdot \overbrace{1}^{g'(x)}\,dx$$

$g(x)=x+c \Rightarrow g'(x)=1$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy$$

(z.B. $\int_0^{\pi/4} \sin(x-\frac{\pi}{4})\,dx$)

f $\qquad -\frac{\pi}{4}=c$

$$\int_0^{\pi/4} \underbrace{\sin}_{f}(\underbrace{x-\frac{\pi}{4}})\overset{1}{\cdot}\,dx = \int_{0-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}} \sin y\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin y\,dy$$

$g(x) \Rightarrow g'(x)=1$

$g(x)=x-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow c=-\frac{\pi}{4}$

$$= \Big[-\cos y\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = -1+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \underbrace{2x}_{g'} \cdot \underbrace{\cos}_{f} (\underbrace{x^2}_{g})\, dx$

<u>Also:</u> $y = g(x) = x^2 \implies \begin{cases} g'(x) = 2x \\ g(a) = g(0) = 0^2 = 0 \\ g(b) = g\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$f(y) = \cos(y)$

$$\implies \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos(x^2)\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(y)\, dy$$

$$= [\sin y]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

In der Praxis rechnet man das auch manchmal so:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cdot \cos \underbrace{(x^2)}_{y} dx$$

$\Rightarrow$ Substituiere $y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$

$$\Rightarrow \bullet \ \frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y} \iff \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

$$\bullet \ y(0) = 0^2 = 0$$

$$\bullet \ y\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) = \left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \underset{\cancel{2\sqrt{y}}}{2x} \cdot \underbrace{\cos x^2}_{\cos y} \underbrace{dx}_{\frac{dy}{\cancel{2\sqrt{y}}}} = \int_{y(0)}^{y(\sqrt{\pi/2})} \cos y \, dy = \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy$$

$$= [\sin y]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

(iii) $\int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\pi} \underbrace{\omega}_{g'(t)} \underbrace{\sin}_{f} (\underbrace{\omega t}_{g(t)})\,dt$

$\Rightarrow y = g(t) = \omega \cdot t \Rightarrow \begin{cases} g'(t) = \omega \\ g(0) = \omega \cdot 0 = 0 \\ g(\pi) = \omega \cdot \pi \end{cases}$

$f(y) = \sin y$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} \sin(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega\pi} \sin y\,dy$

$= \frac{1}{\omega}\left[-\cos y\right]_0^{\pi\cdot\omega}$

$= \frac{1}{\omega}\left[-\cos(\omega\pi) - (-\cos(0))\right]$

$= \frac{1}{\omega}\left[-\cos(\omega\pi) + 1\right]$

Alternativ:

$$\int_0^{r} \sin(\underbrace{\omega t}_{=:y})\,dt$$

$\Rightarrow$ Substituiere $y = \omega t \iff t = \dfrac{y}{\omega}$

$\Rightarrow$ • $\dfrac{dy}{dt} = \omega \iff dt = \dfrac{dy}{\omega}$

• $y(0) = \omega \cdot 0 = 0$

• $y(r) = \omega \cdot r$

$$\Rightarrow \int_0^{r} \underbrace{\sin \underbrace{\omega t}_{y}}_{\sin y} \underbrace{dt}_{\frac{dy}{\omega}} = \int_0^{\omega \cdot r} \frac{1}{\omega} \sin y \, dy$$

$$= \left[-\frac{1}{\omega} \cos y \right]_0^{\omega r} = -\frac{1}{\omega} \cos \omega r + \frac{1}{\omega} \cdot 1$$

Bemerkung:

Die jeweils zweite Methode in Beispiel (ii) und (iii) ist besonders dann nützlich, wenn sich nicht sofort eine Zerlegung des Integranden in die Form $f(g(x))\cdot g'(x)$ aufdrängt, und man erstmal etwas "herumprobieren" muss, bis sich eine solche Zerlegung oder zumindest eine Vereinfachung des Integrals ergibt.

Beispiel: $(a, b \geq 0)$

$$\int_a^b x^3 \exp(-\alpha x^2)\, dx \qquad (\alpha = \text{const}, \alpha \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ Obwohl sich eine Zerlegung der Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ nicht aufdrängt, raten wir, dass sich das Integral zumindest vereinfachen könnte, wenn man substituiert:

$$y := -\alpha x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\alpha x \Longleftrightarrow -2\alpha \sqrt{\frac{y}{-\alpha}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{-2\alpha\sqrt{\frac{y}{-\alpha}}}$$

- $x^3 = \left(\sqrt{\frac{y}{-\alpha}}\right)^3 = \left(\frac{y}{-\alpha}\right)^{3/2}$

- $y(a) = -\alpha a^2$
- $y(b) = -\alpha b^2$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{x^3}_{\left(\frac{y}{-\alpha}\right)^{3/2}} \underbrace{\exp[-\alpha x^2]}_{e^y} \underbrace{dx}_{\frac{dy}{-2\alpha\sqrt{\frac{y}{-\alpha}}}} = \int_{-\alpha a^2}^{-\alpha b^2} \left(\frac{y}{-\alpha}\right) \cdot e^y \cdot \frac{1}{-2\alpha}\, dy$$

$$= \int_{-\alpha a^2}^{-\alpha b^2} \frac{1}{2\alpha^2}\, y e^y \, dy = \frac{1}{2\alpha^2} \int_{-\alpha a^2}^{-\alpha b^2} y e^y \, dy$$

Das letzte Integral ist nun wesentlich einfacher als das Ausgangsintegral und kann z.B. mit partieller Integration weiter ausgerechnet werden (siehe oben)

Das Folgende Beispiel zeigt, dass manchmal die naheliegendste Substitution nicht unbedingt die zielführendste ist, sondern dass manchmal eine etwas "unorthodoxere" Substitution zum Erfolg führt.

__Beispiel:__ $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ mit $a,b \in (-1,1)$

Am naheliegendsten wäre wohl:

__1. Versuch:__

$y := 1-x^2 \iff x = \pm\sqrt{1-y}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -2x = \mp 2\sqrt{1-y} \iff dx = \dfrac{dy}{\mp 2\sqrt{1-y}}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{dy}{\mp 2\cdot\sqrt{1-y}}$ $\rightarrow$ Führt hier <u>nicht</u> weiter

Anders dagegen der etwas weniger naheliegende

2. Versuch:

Idee: $\sqrt{1-x^2}$ erinnert an:

$$\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{\cos^2 y} = |\cos y|$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ $\qquad$ $\sqrt{x^2} = |x|$

$\to$ Versuch doch mal:

$$x = \sin y \iff y = \arcsin x$$

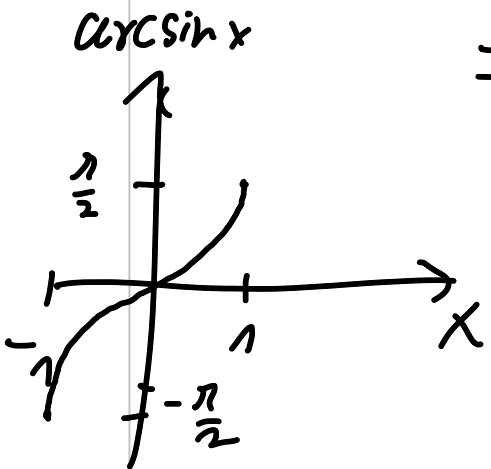
$\Rightarrow$ • $\dfrac{dx}{dy} = \cos y \iff dx = \cos y \, dy$

• $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \dfrac{1}{|\cos y|}$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\frac{1}{|\cos y|}} \underbrace{dx}_{\cos y\, dy} = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{\cos y}{|\cos y|}\, dy$$

$\rightarrow$ Nur noch der Betrag von $\cos y$ stört.

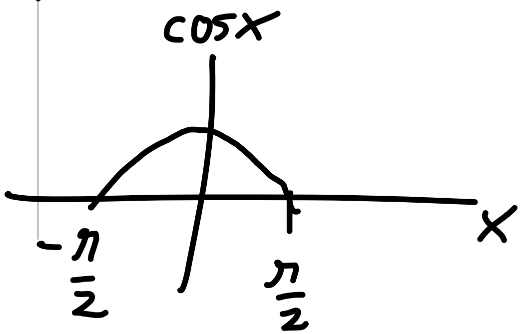
Aber: Bei uns ist $x \in (-1, 1)$



$\Rightarrow y = \arcsin x$ ist hier eindeutig und nimmt Werte in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ an

Aber für $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist dann $\cos y \in (0, 1]$, $\Rightarrow \cos y > 0$

$\Rightarrow |\cos y| = \cos y$



$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \frac{\cos y}{\cos y}\,dy = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} 1 \cdot dy$$

$$= \left[y \right]_{\arcsin a}^{\arcsin b}$$

$$= \underline{\underline{\arcsin b - \arcsin a}}$$