Vorlesung 12

26.3.2012

Letztes Mal:

$$I := \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (a,b \in (-1,1))$$

1. Versuch (naheliegend):

$$y := 1-x^2$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{\mp 2\sqrt{y}\sqrt{1-y}}\,dy$$

$\longrightarrow$ Bringt nichts!

2. Versuch (weniger naheliegend):

$$x = \sin y \iff y = \arcsin x$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow I = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} 1 \cdot dy = [y]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)}$$

$$= \arcsin(b) - \arcsin(a)$$

$\longrightarrow$ Die bringt's!

ist auch konsistent mit unserem Ergebnis aus Vorlesung 8:

$$\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\iff \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

Bemerkungen:

(i) Die obige Substitution $x = \sin y$ ist ein Beispiel für eine "trigonometrische Substitution"

→ Können z.B. nützlich sein, wenn der Integrand eine Funktion von $(1-x^2)$ ist, aber z.B. auch für $\int \tan x \, dx$, was mit $y = \cos x$ vereinfacht und berechnet werden kann.

(ii) Für Integranden, die Funktionen von $(1+x^2)$ sind, sind manchmal Substitutionen mit hyperbolischen Funktionen nützlich.

z.B. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \Rightarrow x = \sinh(y) \Longleftrightarrow y = \operatorname{arsinh} x$

$\Rightarrow \cdot \frac{dx}{dy} = \cosh y \Longleftrightarrow dx = \cosh(y)\,dy$

$\cdot \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2(y)} = \sqrt{\cosh^2 y}$

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$= |\cosh y|$

$\cosh y > 0$

$= \cosh y$

$\Rightarrow \int \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh y}\,\underbrace{dx}_{\cosh y\,dy} = \int \underbrace{\cosh y}_{u} \cdot \underbrace{\cosh y}_{v'}\,dy$

$u = \cosh y \Rightarrow u' = \sinh y$

$v' = \cosh y \Rightarrow v = \sinh y$

(Partielle Integration)

$$\Rightarrow \int \cosh^2 y\, dy = \underbrace{\cosh y}_{u} \cdot \underbrace{\sinh y}_{v} - \int \underbrace{\sinh y}_{u'} \cdot \underbrace{\sinh y}_{v}\, dy$$

$$= \cosh y \cdot \sinh y - \left[\int \cosh^2 y\, dy - \underbrace{\int 1 \cdot dy}_{y+c}\right]$$

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$

$\Leftrightarrow \sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$

$$\Leftrightarrow 2\int \cosh^2 y\, dy = \cosh y \cdot \sinh y + y \; (+\tilde{c})$$

$$\Leftrightarrow \int \cosh^2 y\, dy = \frac{1}{2}\cosh y \cdot \sinh y + \frac{1}{2} y \; (+c)$$

"Resubstitution": Drücke y wieder durch x aus:

- $\cosh y = \sqrt{1+x^2}$
- $\sinh y = x$
- $y \;\; = \operatorname{arsinh} x$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \cdot x + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} x \; (+c)$$

④ Komplexe Zahlen

Motivation:

Viele quadratische Gleichungen haben in $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ (= Menge der rationalen Zahlen) kein Lösung, z.B.

$$\boxed{x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$$

→ Erweitere den Zahlbereich von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ (= Menge der reellen Zahlen)

→ $\boxed{x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}}$ Kann gelöst werden.

Aber:

Viele quadratische Gleichungen haben auch in $\mathbb{R}$ keine Lösung!

Standardbeispiel:

$$\boxed{x^2 = -1}$$

(wäre $x \in \mathbb{R}$, so wäre stets $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$)

Allgemeiner:

$$x^2 = -b^2 \quad (b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$$

bzw. $(x-a)^2 = -b^2 \quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$

↳ haben auch keine Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

Für viele Zwecke ist es jedoch nützlich, auch diese Gleichungen zumindest formal lösen und mit den Lösungen rechnen zu können.

Dies wird durch die Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu den sog. Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ möglich.

Hierzu:

__Def 1:__ Wir bezeichnen mit i eine formale Lösung der Gleichung

$$\boxed{i^2 = -1} \qquad (\text{bzw. } x^2 = -1)$$

Häufig schreibt man:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

i heißt <u>"imaginäre Einheit"</u>.

Damit auch Gleichungen der Form

$$x^2 = -b^2 \iff x = \pm\sqrt{-b^2} = \pm|b|\sqrt{-1} = \pm|b| \cdot i$$
$$\forall b \in \mathbb{R}$$

gelöst werden können, müssen wir $i = \sqrt{-1}$ mit beliebigen reellen Zahlen $b \in \mathbb{R}$ multiplizieren können, so dass

$$x = \pm |b| \cdot i \quad (\text{bzw. } x = b \cdot i)$$

im neuen Zahlbereich enthalten sein muss.

Damit schließlich auch Gleichungen der Form

$$(x-a)^2 = -b^2 \iff x - a = \pm\sqrt{-b^2} = \pm |b| \sqrt{-1}$$
$$\iff x = a \pm |b| i$$

gelöst werden können, müssen wir zu bi ($b \in \mathbb{R}$) auch beliebige reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ addieren können. M.a.W.: $a + bi$ soll auch ($\forall a, b \in \mathbb{R}$) im neuen Zahlbereich enthalten sein.

Dies motiviert (von jetzt an mit x, y statt a, b):

Def. 2: Eine Komplexe Zahl z ist eine formale Summe

$$\boxed{z = x + i \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})}$$

die die folgenden Rechenregeln erfüllt:

(Für $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$)

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + i y_1 x_2 - y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}}$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Beispiele:

(i) $(5+3i)-\left(\frac{6}{5}+i\right)=\left(5-\frac{6}{5}\right)+i(3-1)=\frac{19}{5}+2i$

(ii) $(2-i)(5+6i)=10+12i-5i+6=16+7i$

(iii) $i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=+1$

$i^5=i^4\cdot i=i$

$i^6=i^4\cdot i^2=(+1)\cdot(-1)=-1$

$\vdots$

Def. 3: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißen

a) $\mathrm{Re}(z) := x$ "der Realteil von z"

b) $\mathrm{Im}(z) := y$ "der Imaginärteil von z"

c) $\bar{z} \equiv z^* := x - iy$ "die zu z komplex konjugierte Zahl"

$$\left(\Rightarrow \mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z), \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z) \right)$$

d) $\frac{1}{z} := \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ "das Inverse von z" $(z \neq 0)$ (im Sinne eines Kehrwertes)

[Es soll gelten: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$: $\underbrace{(x+iy)}_{z} \cdot \underbrace{\frac{(x-iy)}{(x^2+y^2)}}_{\frac{1}{z}} = \frac{x^2 - \cancel{ixy} + \cancel{ixy} + y^2}{x^2+y^2} = 1$ ✓]

<u>Beispiel:</u>

$$z = 5 - 2i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 5$$

$$\operatorname{Im}(z) = -2 \quad (\text{Nicht: } -2i \text{ !!!})$$

$$\bar{z} = 5 + 2i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{5+2i}{5^2+(-2)^2} = \frac{5+2i}{25+4} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5}{29}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{29}$$

<u>Bemerkung:</u>

Die Menge der Realteile $\mathrm{Re}(z)$ kann mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen identifiziert werden, sodass

$$\boxed{\mathbb{R} = \{(x+iy) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} \subset \mathbb{C}}$$

Es gelten Folgende Rechenregeln:

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (z, w \in \mathbb{C})$

(Denn: $z = x+iy$, $w = u+iv$

$\Rightarrow z+w = (x+u) + i(y+v)$

$\Rightarrow \overline{z+w} = (x+u) - i(y+v) = \overbrace{x-iy}^{\bar{z}} + \overbrace{u-iv}^{\bar{w}}$

$= \bar{z} + \bar{w}$)

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad (z, w \in \mathbb{C})$

(Denn: $(z = x+iy,\ w = u+iv)$

$\Rightarrow z \cdot w = (x+iy) \cdot (u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$

$\Rightarrow \overline{z \cdot w} = (xu-yv) - i(xv+yu) = (x-iy) \cdot (u-iv) = \bar{z} \cdot \bar{w}$)

c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$$\left(\text{Denn: } \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(x+iy)}_{z} + \underbrace{(x-iy)}_{\bar{z}}\Big) = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}(z)\right)$$

d) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$$\left(\text{Denn: } \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}\Big(\underbrace{(x+iy)}_{z} - \underbrace{(x-iy)}_{\bar{z}}\Big) = \frac{2iy}{2i} = y\right)$$

e) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ (also $z = x + i\cdot 0 = x \in \mathbb{R}$)

$$\left(\underline{\text{Denn:}}\ z = (x+iy) \overset{!}{=} (x-iy) = \bar{z}\right.$$

$$\left.\iff 2iy = 0 \implies y = 0 \implies z = x + i\cdot 0 = x \in \mathbb{R}\right)$$

f) $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$

$$= \left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$$

g) $$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2}$$

<u>Spezialfall:</u>

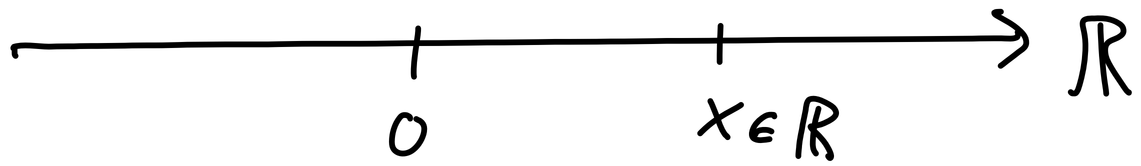
$\frac{1}{i} = -i$ denn $i \cdot (-i) = -(-1) = +1$

$\bar{i} = -i$

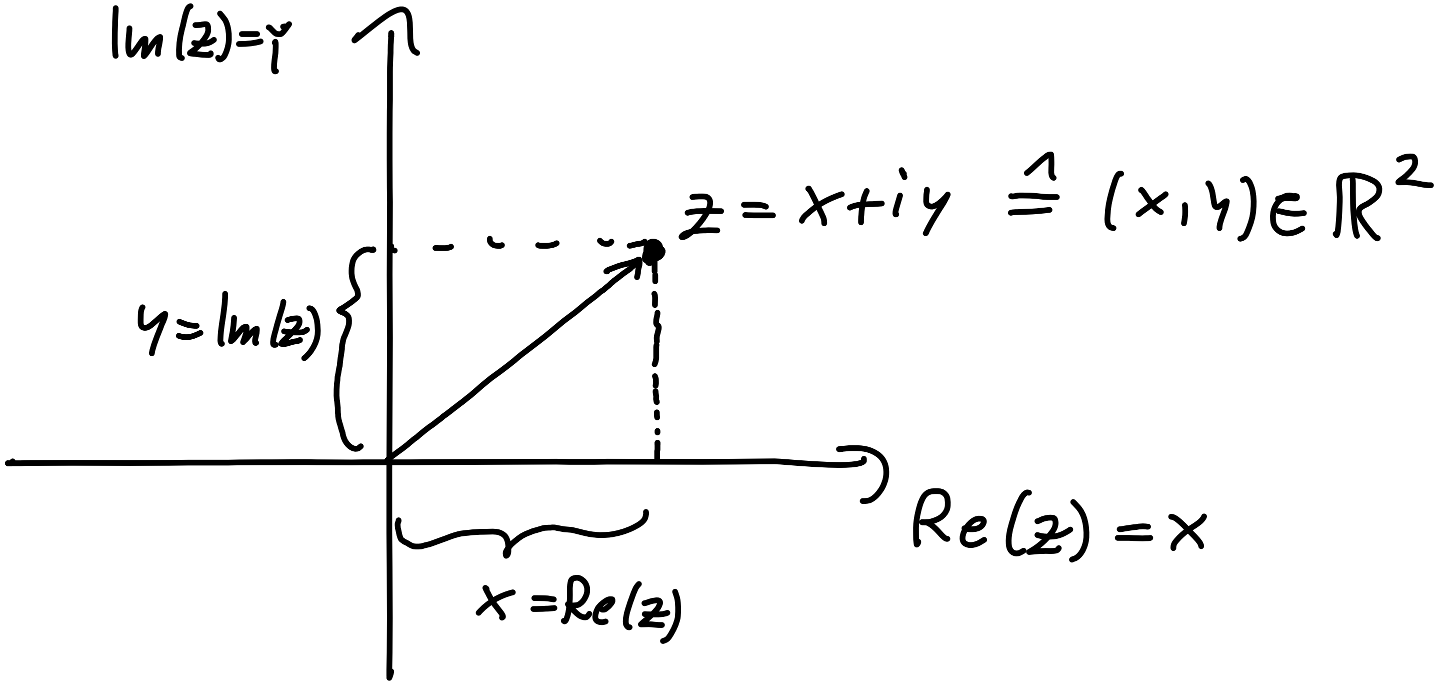
$i \cdot \bar{i} = i(-i) = -(-1) = 1$

Die komplexe Zahlenebene

- Reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ lassen sich als Punkte auf einer Zahlengeraden geometrisch darstellen:



- Komplexe Zahlen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ lassen sich durch Punkte mit den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der zweidimensionalen Ebene $\mathbb{R}^2$ darstellen:



Diese Ebene heißt dann die Komplexe Zahlenebene.

Die reelle Zahlengerade zur Darstellung von $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ entspricht dann gerade der x-Achse.