Vorlesung 13

27.3.2012

Letztes Mal: 4 Komplexe Zahlen

$$\boxed{\begin{array}{l} z = x + iy \in \mathbb{C} \\ x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R} \\ i^2 = -1 \quad (i = \sqrt{-1}) \end{array}}$$

$\bar{z} \equiv z^* = x - iy$

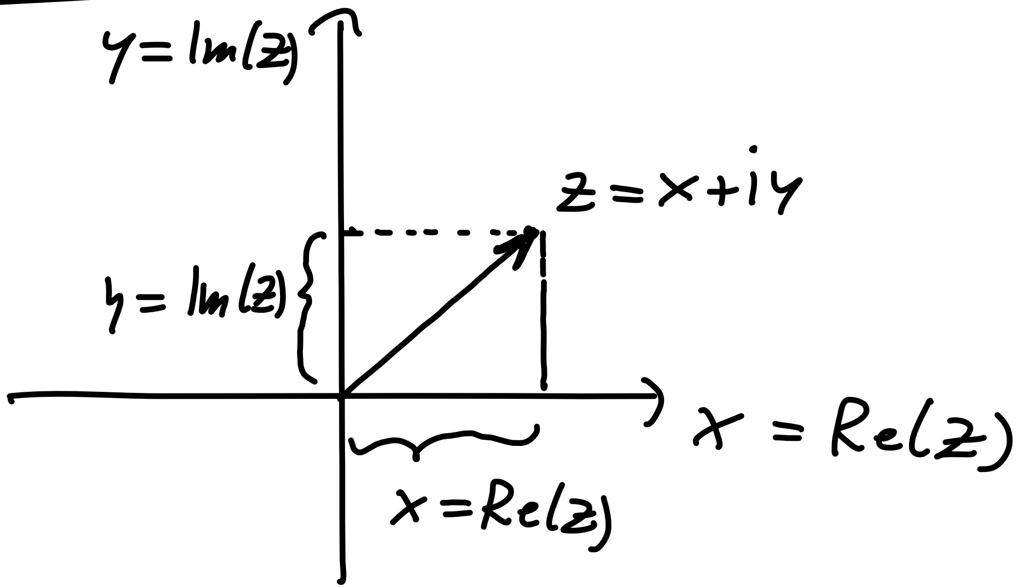
$\Rightarrow$ • $z\bar{z} = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

• $z = \bar{z} \Rightarrow z = x + i0 = x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

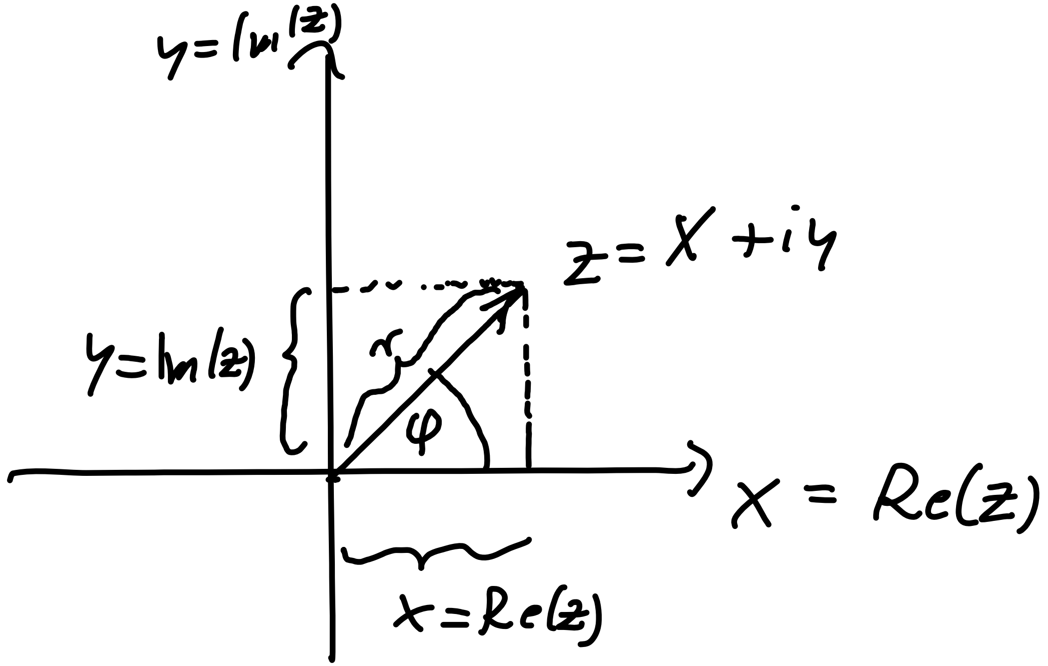
$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{i} = -i}$

Die Komplexe Zahlenebene



Polardarstellung einer Komplexenzahl

Statt mit Kartesischen Koordinaten $(x, y) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ lässt sich eine Komplexe Zahl $z = x + iy$ auch durch PolarKoordinaten in der zweidimensionalen Ebene parametrisieren:



Hierbei nennt man:

- $|z| := r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ = "Betrag" von z
  (= "Pfeillänge")

- $\arg(z) := \varphi$ = "Argument" von z
  (= Winkel zwischen "Pfeil" und der x-Achse)

Offenbar gilt:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} z &= x+iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \bar{z} &= x-iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{aligned}\right.}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \left.\begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y = \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y = \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}\right\} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\left(x, y \Longleftrightarrow r, \varphi \right)$$

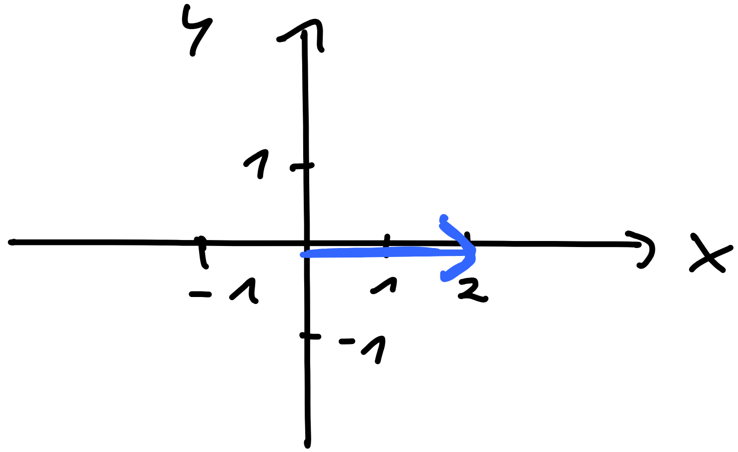
Beispiele:

(i) $z = 2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = x = 2$

$\mathrm{Im}(z) = y = 0$

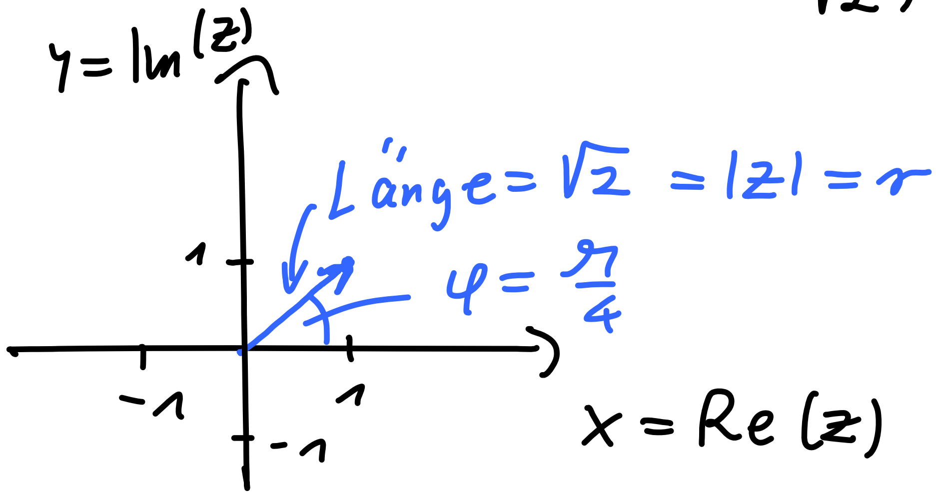
$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arccos(1) = 0$$



(ii) $z = \underbrace{1}_{\mathrm{Re}(z)=1} + \underbrace{i}_{\mathrm{Im}(z)=+1} \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

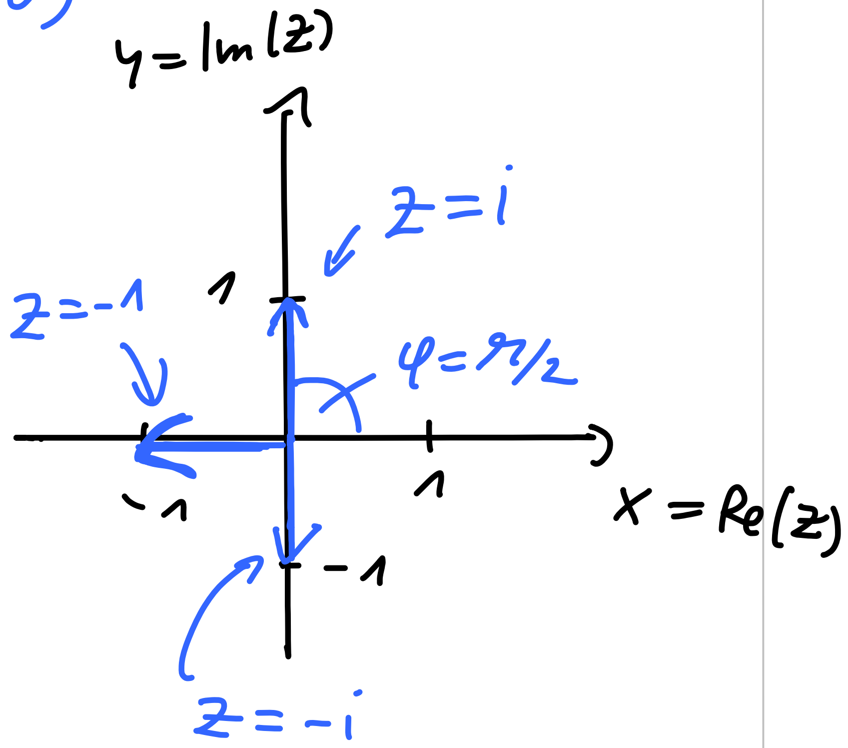


$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow x = y \text{ und } x > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow x = y \text{ und } x < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{5}{4}\pi \end{array}\right)$$

Falls $\varphi \in [0, 2\pi)$

(iii) $z = i \Rightarrow |z| = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\Leftrightarrow 90°)$



(iv) $z = -1 \Rightarrow |z| = 1$

$\varphi = \pi$ $(\Leftrightarrow 180°)$

(v) $z = -i \Rightarrow |z| = 1$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ $(\Leftrightarrow 270°)$

Falls man $\varphi \in [0, 2\pi)$ aufgibt,
wäre auch $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{7}{2}\pi$ oder....

Exponentialform einer komplexen Zahl

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Reihenentwicklungen:

(siehe Vorlesung 9)

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}}$$

Definiert man nun analog:

$$\boxed{e^{i\varphi} := 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \ldots}$$

so ergibt sich:

$$e^{i\varphi} = 1 + (i\varphi) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots$$

$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

$$\left(i\frac{\varphi^5}{5!} = i \cdot \left(\frac{\varphi^5}{5!}\right) = \frac{(i \cdot \varphi^5)}{5!} \right)$$

(es gilt: $i(a \cdot b) = (i \cdot a) \cdot b$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right)}_{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

(Euler'sche Formel)

$$\Rightarrow \boxed{z = x + iy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geometrisch} \\ \text{(siehe oben)}}}{=} \overset{|z|}{\widetilde{r}}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euler'sche Formel}}}{=} r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}}$$

(Polardarstellung einer Komplexenzahl)

Analog:

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$= r(\underbrace{\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)}_{e^{-i\varphi}})$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{z} = r e^{-i\varphi} = |z| e^{-i\varphi}}$$

Beispiele:

(i) $1 = \underbrace{1 \cdot e^{i \cdot 0}}_{}$ Polardarstellung von 1 für $\varphi \in [0, 2\pi)$ $= e^{i \cdot 0} = e^0$

$r = 1$

$\varphi = 0$

(ii) $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$r = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

(iii) $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

$r = 1$

$\varphi = \pi$

(iv) $-i = 1 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$

(v) $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

Eine wichtige Anwendung der Euler'schen Formel

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left((\cos\varphi + i\cancel{\sin\varphi}) + (\cos\varphi - i\cancel{\sin\varphi})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cos\varphi = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)}$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2i}\left(\cancel{\cos\varphi} + i\sin\varphi - (\cancel{\cos\varphi} - i\sin\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot 2i\sin\varphi = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = \frac{-i}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)}$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

(Exponentialdarstellungen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$)

Anwendung:

Multiplikationstheoreme von sin und cos:

z.B. $$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$$\left(e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{2i\varphi} - \cancel{1} + \cancel{1} - e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi)}$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen in der Exponentialdarstellung

$(z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}\,,\; z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2})$

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|\, e^{i\varphi_1}}{|z_2|\, e^{i\varphi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\varphi} \qquad (n \in \mathbb{N})$

<u>Beispiel:</u> $z_1 = i \quad = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow$ • $z_1 \cdot z_2 = \underbrace{1 \cdot \sqrt{2}}_{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

• $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

• $(z_2)^3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3\, e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 3}$