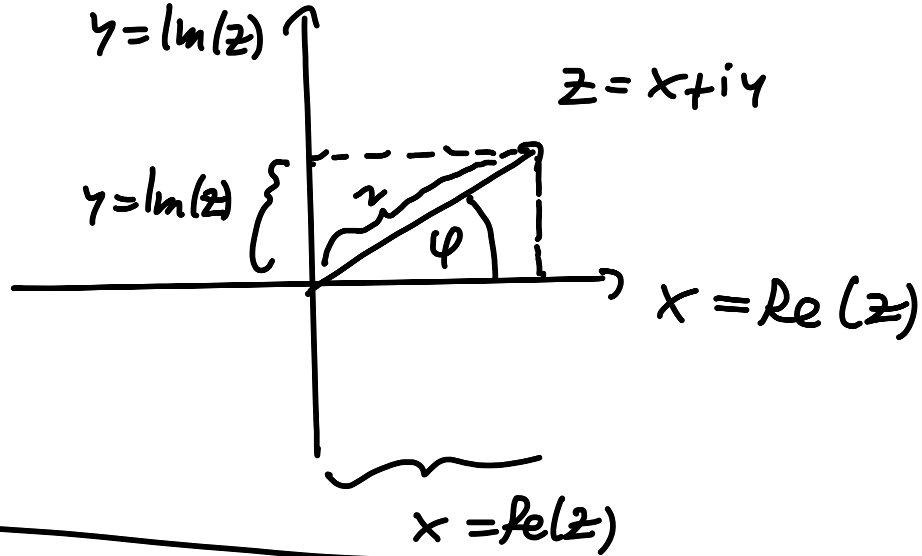
Vorlesung 14 28.3.2019

Letztes Mal:

Polardarstellung (auch PolarForm) einer Komplexen Zahl



$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\sin\varphi & \Longleftrightarrow & \varphi \overset{?}{=} \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (y \geq 0) \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (y < 0) \end{cases} \end{array}} \quad (*)$$

Für $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

("Trigonometrische Darstellung der Polar Form")

$$\Updownarrow \leftarrow \boxed{e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

("Exponentialdarstellung (der Polar Form)")

Die Mehrdeutigkeit des Arguments einer Komplexen Zahl

Der Polarwinkel φ (also das "Argument" $\arg(z)$ von z) einer Komplexen Zahl $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ist eindeutig, wenn man φ z.B. auf den Wertebereich $[0, 2\pi)$ beschränkt

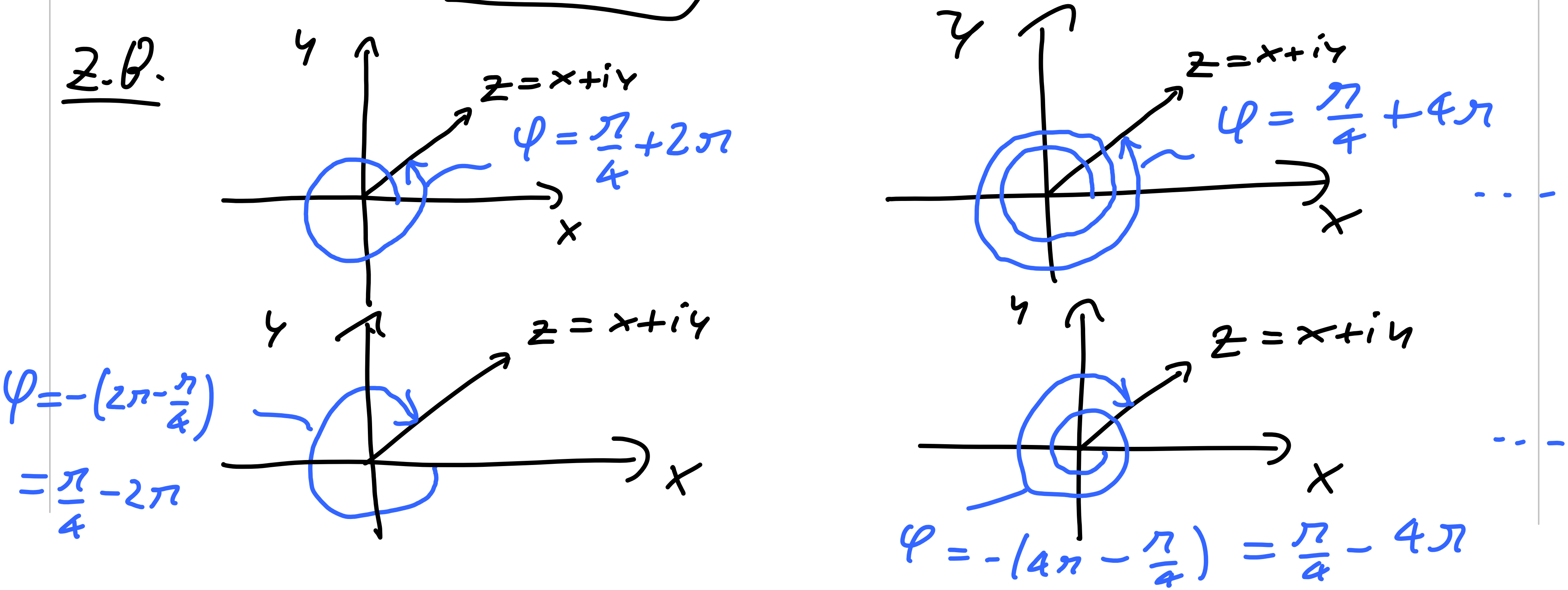
$$\boxed{\varphi \in [0, 2\pi) \Rightarrow \varphi \text{ ist eindeutig}}$$

denn es gilt: (*)

Lässt man dagegen (ähnlich wie bei Sinus und Cosinus) auch "Mehrfachumläufe" und eine "Umkehrung des Drehsinns" zu, so ist der erlaubte Wertebereich

$$\boxed{\varphi \in \mathbb{R}}$$

z.B.



<u>Kann man machen, aber:</u>

Ein gegebenes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ hat dann <u>nicht mehr genau einen Polarwinkel</u> $\varphi \in [0, 2\pi)$, sondern <u>unendlich viele Polarwinkel</u> φ_n der Form

$$\boxed{\varphi_n = \varphi + 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{Z})}$$

denn es gilt $|z| e^{i\varphi_n} = |z| e^{i\varphi}$,

$$\left(|z| e^{i\varphi_n} = |z| e^{i(\varphi + 2\pi n)} = |z| e^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{i2\pi n}}_{1} = \right.$$

$$\left. = |z| e^{i\varphi} \cdot (\underbrace{\cos(2\pi n)}_{1} + i \underbrace{\sin(2\pi n)}_{0}) = |z| e^{i\varphi} \right)$$

$\Rightarrow$ arg(z) ist dann nur eindeutig bis auf additive ganzzahlige Vielfache von 2π

Beispiele:

- $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2} + 2\pi i} = e^{i\frac{\pi}{2} + 4\pi i} = \ldots$

$$= e^{i\frac{\pi}{2} - 2\pi i} = e^{i\frac{\pi}{2} - 4\pi i} = \ldots$$

$$\Rightarrow \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- $1 = e^{i0} = e^{i2\pi} = e^{i4\pi} = \ldots$

$$= e^{-i2\pi} = e^{-i4\pi} = \ldots$$

$$\Rightarrow \arg(1) = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- $$\left.\begin{aligned} -1 = e^{i\pi} &= e^{i\pi + 2\pi i} = e^{\pi i + 4\pi i} = \ldots \\ &= e^{i\pi - 2\pi i} = e^{i\pi - 4\pi i} = \ldots \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\arg(-1) \\ &= \pi + 2\pi n \\ &(n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Aber: Warum sollte man diese Mehrdeutigkeit bei $\varphi \in \mathbb{R}$ überhaupt zulassen, wenn doch $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig und ausreichend wäre?

Eine Antwort:

$\varphi \in [0, 2\pi)$ verleitet zu Fehlschlüssen beim Wurzelziehen.

Illustration:

Die reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ von

$$\boxed{x^2 = 1}$$

sind

$$\boxed{x = \pm 1}$$

Frage: Was sind die komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

$$\boxed{z^2 = 1} \quad ?$$

Fehlgeleitete Antwort basierend $\arg(\ldots) \in [0, 2\pi)$:

- $z = |z| e^{i\varphi} \quad (\varphi \in [0, 2\pi))$
- $1 = 1 \cdot e^{i0}$

$$\Rightarrow \quad z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} \overset{!}{=} 1 = 1 \cdot e^{i0}$$

$\Rightarrow$
- $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$
- $2i\varphi = i \cdot 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$

$$\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i0} = e^0 = 1$$

$\rightarrow$ Nanu? Wo ist denn die bereits aus $\mathbb{R}$ bekannte Lösung $\underline{\underline{z = -1}}$ geblieben?

Richtige Antwort basierend auf $\arg(\ldots) \in \mathbb{R}$

- $z = e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R})$
- $1 = 1 \cdot e^{2\pi i n} \quad (n \in \mathbb{Z})$ (statt lediglich $1 = 1 \cdot e^{i0}$)

$$\Rightarrow z^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} \stackrel{!}{=} 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n}$$

$\Rightarrow$
- $|z| = 1$
- $2i\varphi = 2\pi i n \Longleftrightarrow \varphi = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} z &= 1 \cdot e^{i\pi n} = e^{i\pi n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ &= (e^{i\pi})^n = (-1)^n \\ &= \begin{cases} (+1) & \text{für } n \text{ gerade} \\ (-1) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Beide aus $\mathbb{R}$ bekannten Lösungen existieren natürlich auch in $\mathbb{C}$, Man sollte aber $\underline{\arg(\ldots) \in \mathbb{R}}$ bei der Benutzung der Polardarstellung zulassen, um auch auf beide Lösungen geführt zu werden.

Ein weiteres Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{l} x^3 = 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x = +1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z^3 = 1 \quad , \quad z \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow z = ? \end{array}}$$

Wir nehmen jetzt von vornherein $\arg(\ldots) \in \mathbb{R}$ an.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ z = |z| e^{i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbb{R}) \\ \bullet\ 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

$$\Rightarrow z^3 = |z|^3 e^{3i\varphi} \overset{!}{=} 1 = 1 \cdot e^{2\pi i n}$$

$\Rightarrow$ • $|z| = 1$

• $3i\varphi = 2\pi i n \iff \boxed{\varphi = \frac{2\pi n}{3} \quad (n \in \mathbb{Z})}$

$$\Rightarrow \boxed{z = e^{\frac{2\pi}{3} i n} \quad (n \in \mathbb{Z})}$$

$\rightarrow$ Wie viele verschiedene $z \in \mathbb{C}$ sind das?

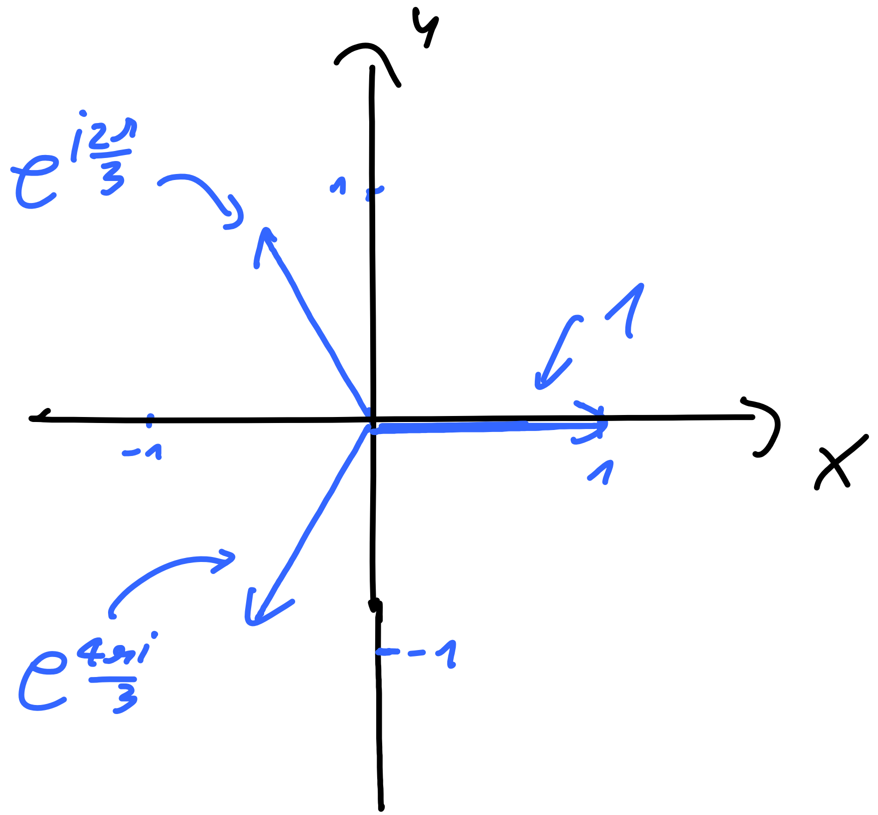
$\Rightarrow$ Teile hierzu die möglichen $n \in \mathbb{Z}$ in drei Klassen auf:

$$n = \left\{ \begin{matrix} \ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots \\ \ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots \\ \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 + 3m \\ 1 + 3m \\ 2 + 3m \end{matrix} \right\} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{2\pi i n}{3}} = \left\{ \begin{matrix} e^{\frac{2\pi i}{3}(0+3m)} = e^{0 + 2\pi i m} = e^{2\pi i m} = 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}(1+3m)} = e^{\frac{2\pi i}{3} + 2\pi i m} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i m}}_{1} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}(2+3m)} = e^{\frac{4\pi i}{3} + 2\pi i m} = e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i m}}_{1} = e^{\frac{4\pi i}{3}} \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ $z^3 = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau drei Lösungen:

$z = 1$ oder $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ oder $z = e^{\frac{4\pi i}{3}}$



$\Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ gibt es <u>drei "dritte Einheitswurzel"</u>

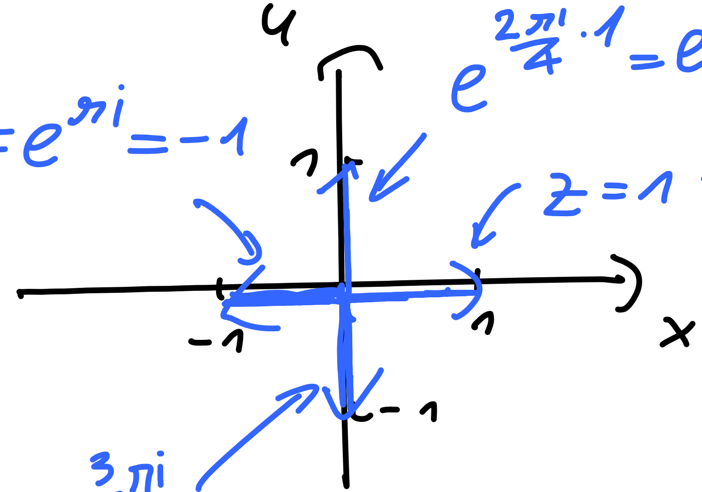
Analog:

$$\boxed{z^k = 1 \quad (k \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C})}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = e^{\frac{2\pi i}{k} n} \quad (n = 0, 1, \dots, k-1)}$$

(In $\mathbb{C}$ gibt es k "k-te Einheitswurzeln")

Beispiel: $k = 4$: $z^4 = 1$



$e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

$e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 2} = e^{\pi i} = -1$

$z = 1 = e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 0}$

$e^{\frac{2\pi i}{4} \cdot 3} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$

$1^4 = 1$

$i^4 = 1$

$(-1)^4 = 1$

$(-i)^4 = 1$ ✓

Allgemein:

$$\boxed{\begin{aligned} &z^k = w = |w| e^{i\varphi} \quad (k \in \mathbb{N},\ w \in \mathbb{C}^*) \\ &\Rightarrow z = \sqrt[k]{|w|}\, e^{i\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi i}{k} n} \quad (n = 0, 1, \dots, k-1) \end{aligned}}$$

(In $\mathbb{C}$ hat jedes $w \in \mathbb{C}^*$ k k-te Wurzeln)

Also: Vorsicht beim Wurzelziehen in $\mathbb{C}$!

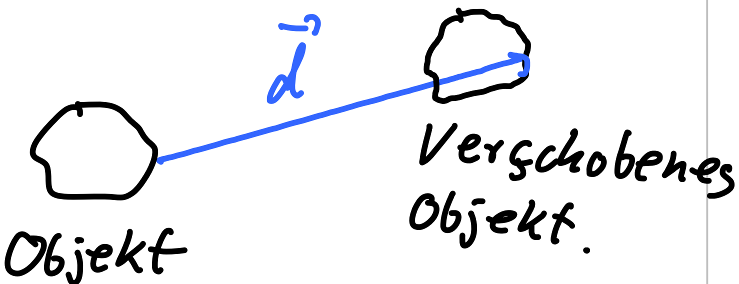
(5) Vektorrechnung

5.1 Motivation:

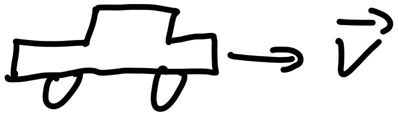
Viele physikalische Größen haben nicht nur einen <u>Betrag</u>, sondern auch eine <u>Richtung</u>.

<u>Beispiele</u>:

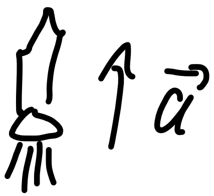
- Verschiebung eines Objektes:



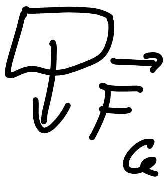
- Geschwindigkeit:



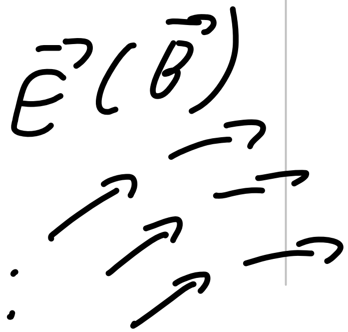
- Beschleunigung:



- Kraft:



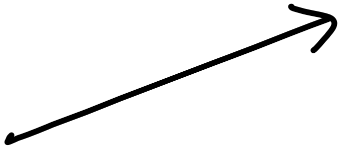
- Elektrische und magnetische Feldstärke:



→ Beschreibung durch "Vektoren"

Das Beispiel der Verschiebung eines Objektes liefert ein besonders anschauliches geometrisches Modell eines Vektors als "Pfeil" (= eine gerichtete Strecke) im Raum, mit dem sich alle gewünschten Eigenschaften von Vektoren motivieren und illustrieren lassen:

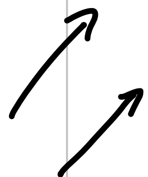
Das "Pfeilmodell" eines Vektors



- Pfeil<u>länge</u> = <u>Betrag</u> des Vektors
  ("Wie weit wird das Objekt verschoben?")

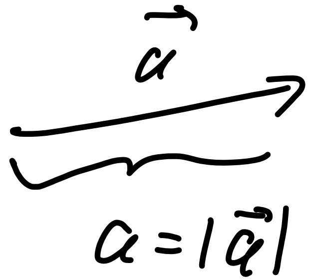
- Pfeil<u>richtung</u> = <u>Richtung</u> des Vektors
  ("In welche Richtung soll das Objekt verschoben werden?")

(Zueinander Parallele, gerichtete Pfeile gleicher Länge repräsentieren dieselbe Richtung und denselben Betrag und damit denselben Vektor)



Schreibweise für Vektoren

- $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ (Vektoren)
- $a = |\vec{a}|$ = Betrag des Vektors $\vec{a}$



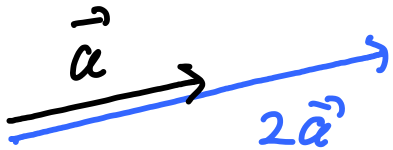
Rechenoperationen mit Vektoren ("Vektoralgebra") im Pfeilmodell

(i) Multiplikation eines Vektors mit einer (reellen) Zahl

Fall 1: $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \alpha\vec{a} :=$ Vektor mit Richtung wie $\vec{a}$ aber Betrag $|\alpha\vec{a}| := \alpha\,|\vec{a}|$

z.B.

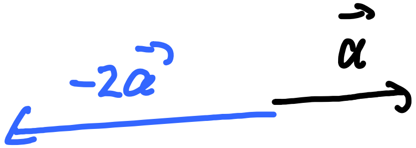


(Streckung von $\vec{a}$ um Faktor α)

Fall 2: $\alpha \in \mathbb{R}_-$

$\alpha\vec{a} :=$ Vektor mit zu $\vec{a}$ entgegengesetzter Richtung und Betrag $|\alpha\vec{a}| := |\alpha|\cdot|\vec{a}|$

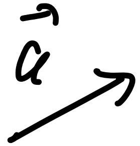
z.B.



(Streckung um Faktor $|\alpha|$ + Umklappen)

Fall 3: $\alpha = 0$

$$\alpha \vec{a} := \vec{0}$$



$= $ "Nullvektor"

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$= $ "Vektor ohne Länge".