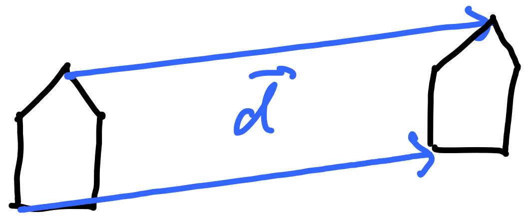
Vorlesung 15 — 29.3.2019

Letztes Mal: Beschreibung von Größen mit Betrag und Richtung durch Vektoren

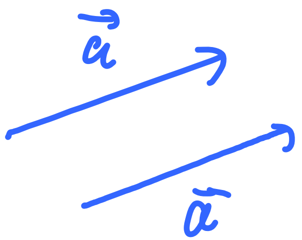
Prototyp: (Parallel-)Verschiebung eines Objektes



Objekt

verschobenes Objekt
(nicht gedreht oder verformt
$\Leftrightarrow$ "parallel verschoben")

$\rightarrow$ **"Pfeilmodell" eines Vektors:**



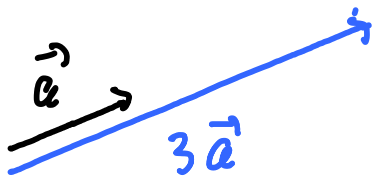
- Richtung von $\vec{a}$ = Pfeilrichtung
- Betrag von $\vec{a}$ = Pfeillänge
- Irrelevant: Position des Anfangspunktes des Pfeils

5.2 Rechenregeln mit Vektoren ("Vektoralgebra") im Pfeilbild

(i) Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer (reellen) Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$

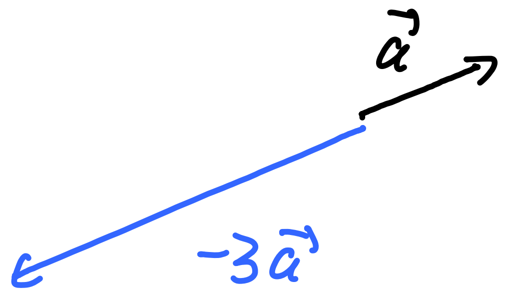
$\alpha > 0$

z.B. $\alpha = 3$

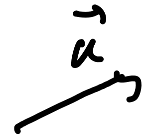


$\alpha < 0$

z.B. $\alpha = -3$



$\alpha = 0$



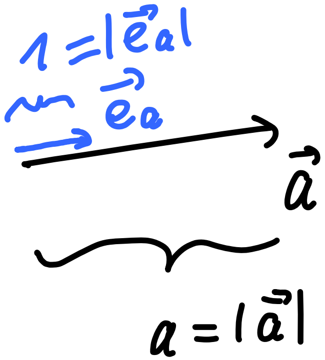
$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

("Nullvektor")

Anwendungen:

a) <u>Einheitsvektor</u> $\vec{e}_a$ in $\vec{a}$-Richtung

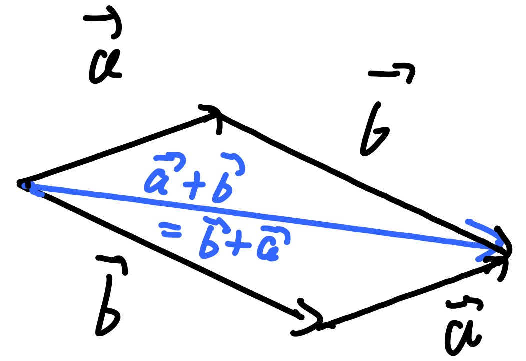
:= Vektor in $\vec{a}$-Richtung, aber mit Betrag 1



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a \iff \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (\vec{a} \neq \vec{0})}$$

b) <u>Physik</u>: z.B. $\vec{F}_G = m\vec{g}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ etc...

(ii) Addition zweier Vektoren

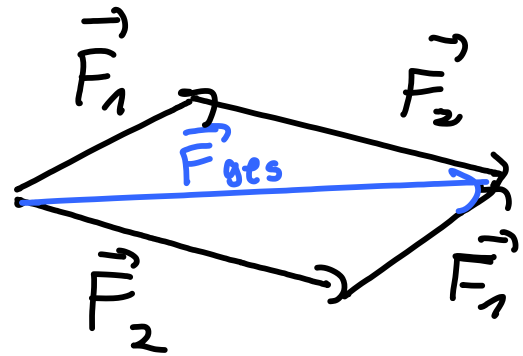


Geometrische Interpretation bei Verschiebungsvektoren

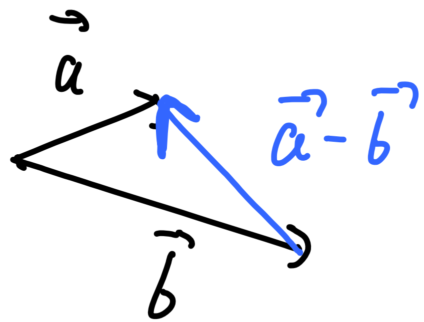
$\vec{a}+\vec{b}$ beschreibt die Gesamtverschiebung, die sich nach Hintereinanderausführung der Verschiebungen um $\vec{a}$ und um $\vec{b}$ ergibt.

Beispiel für phys. Anwendung:

Vektorielle Kräfteaddition

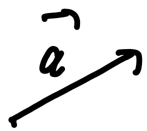


(iii) Subtraktion von Vektoren



(Denn dann ist $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$)

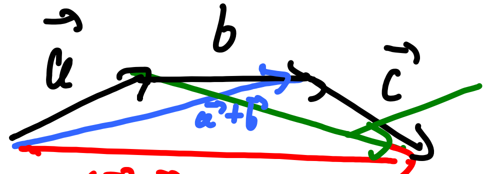
Offenbar gilt: $\boxed{\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}}$



(Außerdem: $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+\left((-1)\,\vec{b}\right)$)

Rechenregeln:

(Geometrisch erschließbar, z.B.



$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$)

- $(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{b}+\vec{a})$ (Addition ist kommutativ)
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (Addition ist assoziativ)
- $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ ($\vec{0}$ ist neutrales Element der Addition)
- Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein "Gegenvektor" $-\vec{a} := (-1)\cdot\vec{a}$, sodass $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{a}-\vec{a} = \vec{0}$

(*)

- $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
- $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$

$\Big\}$ Distributivität

- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (Multiplikation ist assoziativ)

  $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$
- $1\vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ ($1 \in \mathbb{R}$ ist neutrales Element der Multiplikation)

Bemerkung:

Obige Rechenregeln (*) bilden den Ausgangspunkt für die abstrakte Definition eines "Vektorraumes" in der Mathematik:

Ein (reeller) Vektorraum V ist eine Menge mit Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$, die bzgl. der reellen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{R}$ Rechenregeln der Form (*) erfüllen. Die Elemente $\vec{a}, \vec{b}, \ldots \in V$ heißen "Vektoren"

Man kann zeigen:

Jeder so definierte abstrakte (reelle) Vektorraum V lässt sich umgekehrt durch ein "Pfeilmodell" in einen geeigneten $\mathbb{R}^n$ "realisieren" (n heißt die "Dimension" des Vektorraums) (Ausnahme: $n = \infty$).

In dieser Vorlesung:

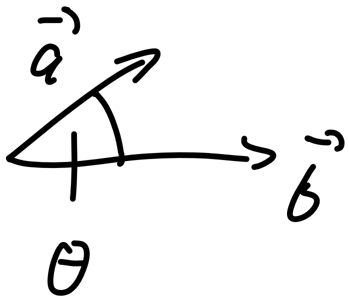
$n = 3$ (oder $n = 2$) und weiterhin das Pfeilmodell im $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^2$) statt der obigen abstrakten Definition.

Weitere Rechenoperationen:

Produkte von Vektoren

(iv) Skalarprodukt zweier Vektoren

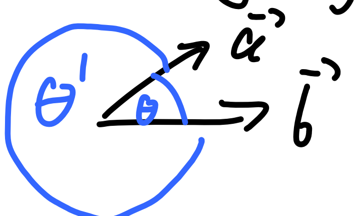
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta \; = \text{reelle Zahl}}$$



(θ = Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

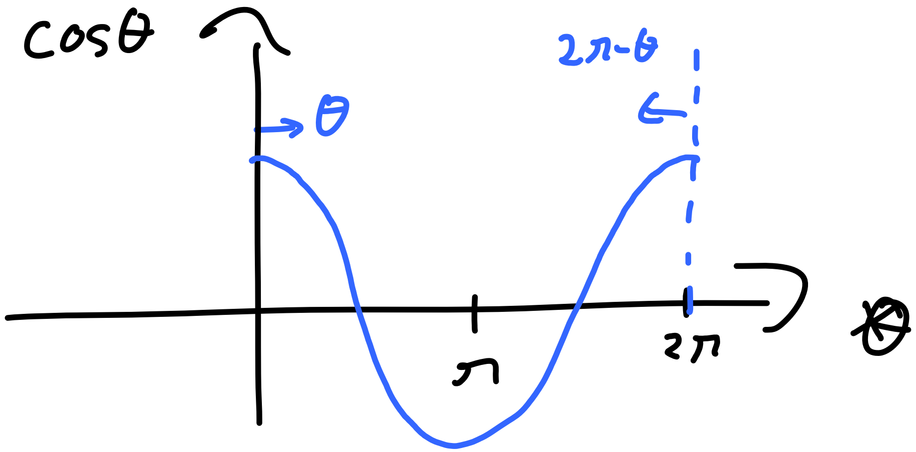
Bemerkung:

Es ist egal, welchen Winkel man nimmt:



Denn: $\theta' = 2\pi - \theta$

$$\Rightarrow \cos\theta' = \cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$$



Offenbar gilt:

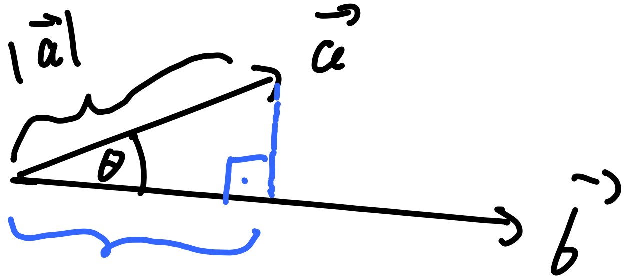
$$\boxed{\cos\theta = \cos\theta' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$$

$\Rightarrow$ Kennt man $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ so kann man θ (bzw. θ') ausrechnen.

(siehe später)

Geometrische Bedeutung von $\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot(\text{Projektion von } \vec{b} \text{ auf } \vec{a})\\ &= |\vec{b}|\cdot(\text{Projektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{b})\end{aligned}}$$



$|\vec{a}|\cdot\cos\theta$ = Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

$\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot(|\vec{a}|\cos\theta)$

Wichtige Spezialfälle:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = |\vec{a}|^2$

$$\Longrightarrow \boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}$$

- Ein Einheitsvektor $\vec{e}$ erfüllt:

$$\boxed{\vec{e} \cdot \vec{e} = |\vec{e}|^2 = 1}$$

$|\vec{e}| = 1$

- Für $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ gilt:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

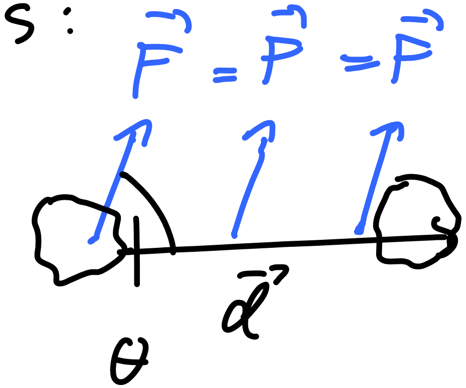
(Denn: $\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3}{2}\pi$
$\Longleftrightarrow \cos \theta = 0$)

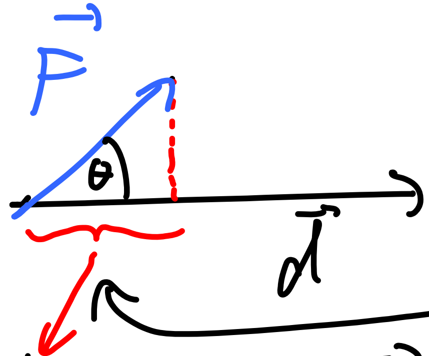
Weitere Rechenregeln

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (Kommutativität)
- $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- $-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (Schwarz'sche Ungleichung)

Phys. Anwendungsbeispiel:

Verrichtete Arbeit W einer konstanten Kraft $\vec{F}$ während einer Verschiebung $\vec{d}$ eines Körpers:





Relevant ist nur die Projektion von $\vec{F}$ in Wegrichtung (also entlang $\vec{d}$):

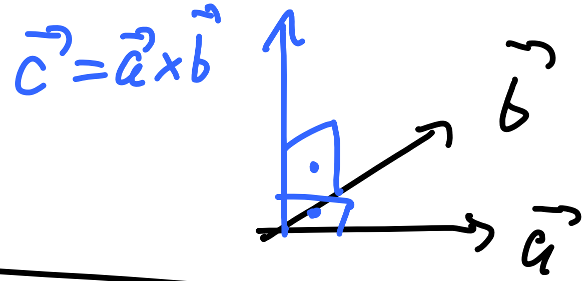
$$\Rightarrow W = |\vec{d}|\,\left(|\vec{F}|\cos\theta\right)$$

$$= \vec{d}\cdot\vec{F}$$

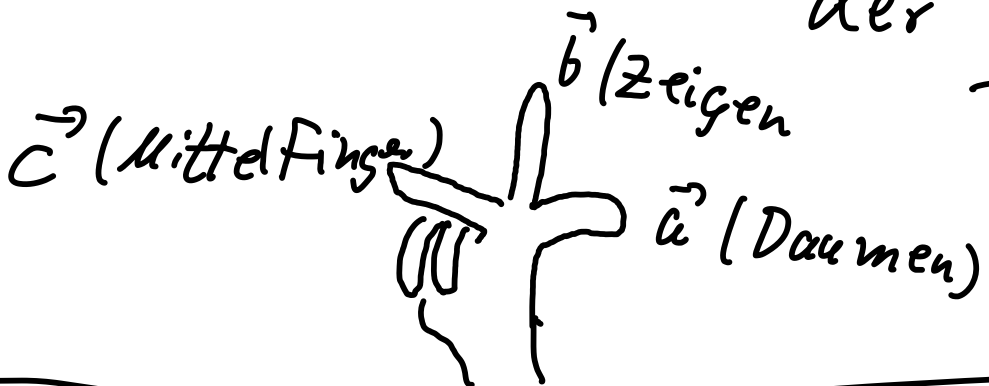
$\Rightarrow$ Falls $\vec{F} \perp \vec{d}$ (z.B. beim Tragen einer Tasche auf horizontaler Ebene) $\Rightarrow W = \vec{F}\cdot\vec{d} = 0$

(v) Das Kreuzprodukt (alias Vektorprodukt alias äußeres Produkt) zwischen zwei Vektoren

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \text{ein } \underline{\text{Vektor}}\ !$$

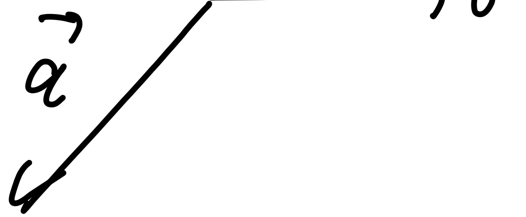


Richtung von $\vec{c}$: senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$ gemäß der "Recht-Hand-Regel"

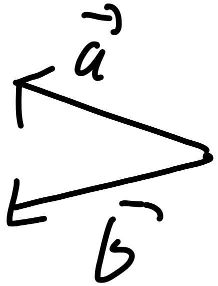


<u>Achtung:</u> Daumen und Zeigefinger spannen den <u>kleineren</u> der beiden Winkel auf ($\theta \leq 180°$)

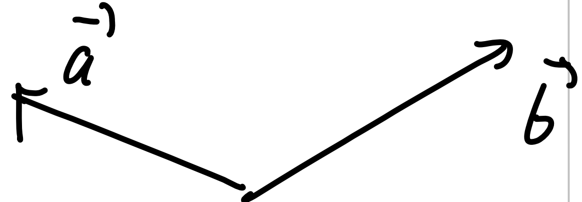
<u>Beispiele</u> ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien in der Zeichenebene)



raus



raus



rein

Es gilt stets:

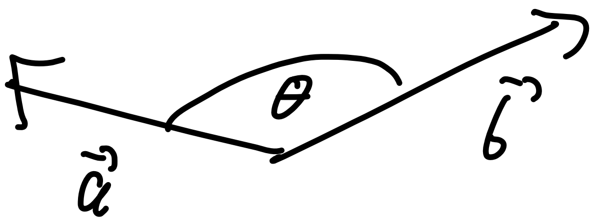
$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = -\,\vec{b}\times\vec{a}}$$

!

Betrag von $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$:

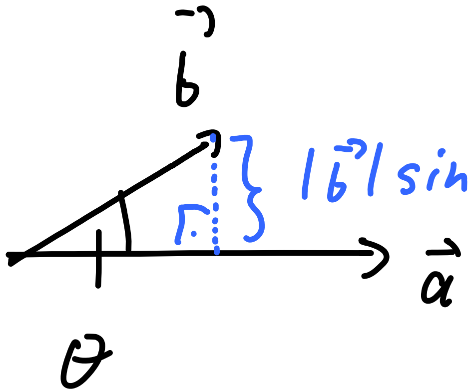
$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta \quad (\theta \leq 180^\circ)}$$



Geometrische Bedeutung

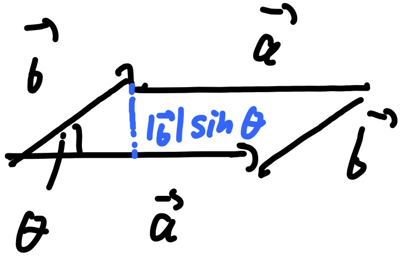
$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot (\text{Projektion von } \vec{b} \perp \text{zu } \vec{a})$$

$$= |\vec{b}| \cdot (\text{Projektion von } \vec{a} \perp \text{zu } \vec{b})$$



$$|\vec{b}| \sin\theta = \text{Projektion von } \vec{b} \perp \text{zu } \vec{a}$$

$\Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| =$ Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:



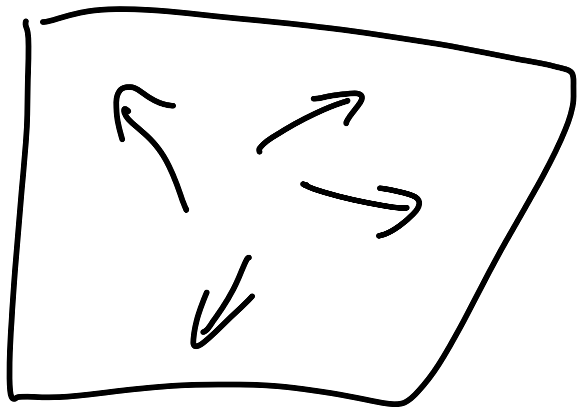
$$F = |\vec{a}| \cdot (\text{Höhe} \perp \text{zu } \vec{a})$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Phys. Anwendungsbeispiel:

Lorentzkraft: $\vec{F}_L = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

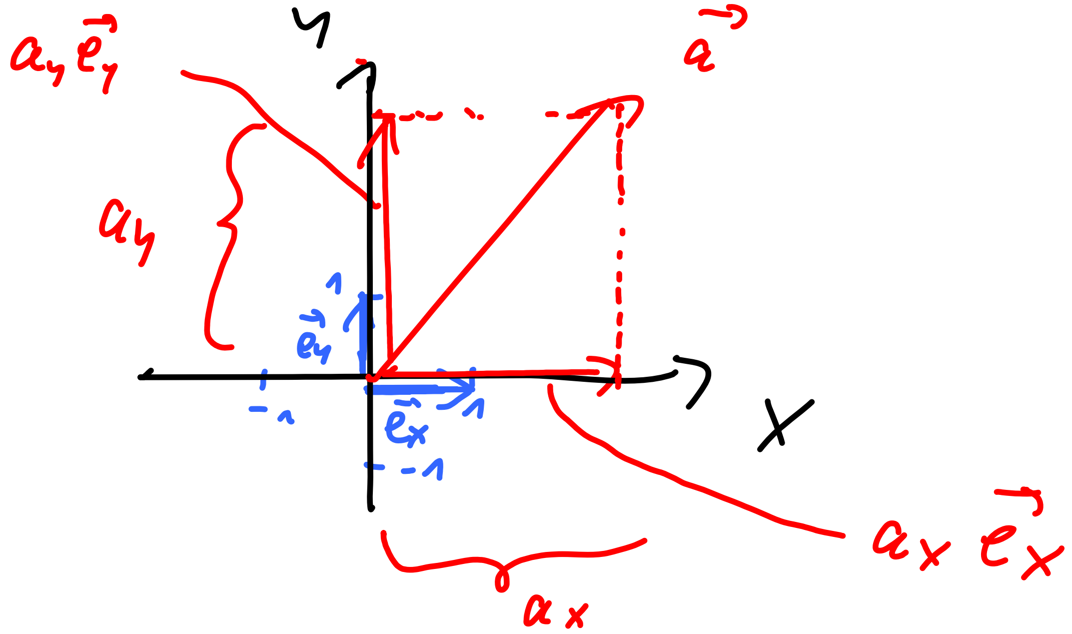
5.3 Vektorrechnung in Komponentendarstellung



Zur Beschreibung und Kommunikation von Vektorrichtungen benutzt man häufig zueinander orthogonale Referenzrichtungen, auf die man sich beziehen kann.

Zunächst in 2D

- Wähle Kartesisches Koordinatensystem für die Ebene mit Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ entlang der Achsen
- Zeichne $\vec{a}$ so, dass er vom Ursprung ausgeht.
- $a_x :=$ x-Koordinate der Pfeilspitze von $\vec{a}$
  $a_y :=$ y-Koordinate der Pfeilspitze von $\vec{a}$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y}$$

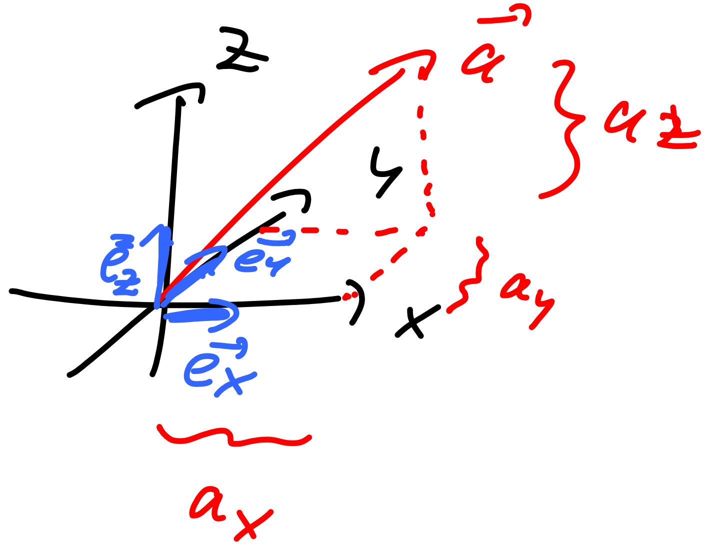
$$(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0)$$

Man sagt:

$\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ bilden eine "Orthonormalbasis (ONB)" von $\mathbb{R}^2$ und a_x, a_y sind die Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. dieser Basis

Analog in 3D:

$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z}$$



Gebräuchliche Schreibweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{"Spaltenvektor"})$$

(oder $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ("Zeilenvektor"))

Man findet:

$$\alpha \vec{a} = \alpha (a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} + a_z \vec{e_z})$$
$$= (\alpha a_x) \vec{e_x} + (\alpha a_y) \vec{e_y} + (\alpha \; a_z) \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}}$$

Analog findet man:

$$\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

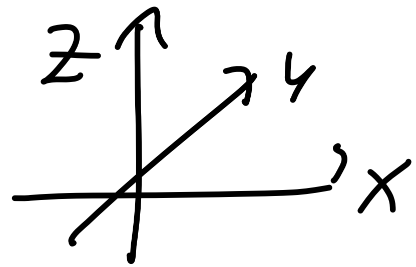
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}}$$

z.B. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 6$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ $\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{5 \cdot 18}}$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}}$$

$\Leftarrow$ Gilt für Rechtssysteme



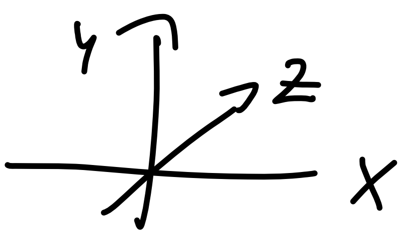
$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{54}$

$=$ Fläche des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(Linkssystem, z.B.:



)